目　录

第一章 预备知识

记号

1.1 贯穿本专著的始终，区域这个术语和符号Ω专门用来表示实n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$中的开集. 我们将论及定义在Ω上的函数的可微性和可积性，这些函数都允许是复值函数，除非另有相反的声明. $\mathbf{C}$表示复数域. 对于$c\in\mathbf{C}$和函数u, v, 数乘cu, 和$u+v$, 积uv总是按照

$$(cu)(x)=cu(x),$$
$$(u+v)(x)=u(x)+v(x),$$
$$(uv)(x)=u(x)v(x)$$

在一切使右端有意义的点上逐点定义的.

$x=(x_1, \cdots, x_n)$表示$\mathbf{R}^n$中一个点；它的范数是
$|x|=\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$, x和y的内积是$x\cdot y=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j$.

如果$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$是非负整数$\alpha_j$的一个$n$重组，我们把$x$叫做一个多重指标(multi-index)且用$x^\alpha$来表示次数为$|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$的单项式$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$. 类似地，如果对于$1\leqslant j\leqslant n$, $D_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$, 则

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$$

表示一个阶数为$|\alpha|$的微分算子. $D^{(0,\cdots,0)}u=u$.

如果α和β是两个多重指标，假如对$1\leqslant j\leqslant n$, $\beta_j\leqslant\alpha_j$我们就说$\beta\leqslant\alpha$, 这时$\alpha-\beta$也是一个多重指标而且$|\alpha-\beta|+|\beta|=|\alpha|$.

我们还记

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

而且，如果 $\beta \leqslant \alpha$ 则

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \binom{\alpha^1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha^n}{\beta_n}.$$

对在 x 附近 $|\alpha|$ 次连续可微的函数 u 和 v，读者可以验证 Leibniz 公式

$$D^\alpha(uv)(x) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u(x) D^{\alpha-\beta} v(x)$$

是成立的.

1.2 如果 $G \subset \mathbf{R}^n$，我们用 $\bar{G}$ 来表示 G 在 $\mathbf{R}^n$ 中的闭包，假如 $\bar{G} \subset \Omega$ 而且 $\bar{G}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集(即有界闭集)，那么记作 $G \subset\subset \Omega$. 如果 u 是定义在 G 上的函数，我们把

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

定义为 u 的支集. 我们说 u 在 Ω 中具有紧支集，如果 $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$. 我们将用"bdry$G$"来表示 G 在 $\mathbf{R}^n$ 中的边界，即，集合 $\bar{G} \cap \overline{G^c}$，其中 $G^c = \mathbf{R}^n \sim G = \{x \in \mathbf{R}^n : x \notin G\}$ 是 G 的余集.

如果 $x \in \mathbf{R}^n$ 且 $G \subset \mathbf{R}^n$，我们用 "dist(x, G)"来表示 x 到 G 的距离，也就是数 $\inf\limits_{y \in G} |x-y|$. 类似地，如果 $F, G \subset \mathbf{R}^n$，

$$\operatorname{dist}(F, G) = \inf_{y \in F} \operatorname{dist}(y, G) = \inf_{\substack{x \in G \\ y \in F}} |x-y|.$$

拓扑向量空间

1.3 我们假定读者熟悉实或复数域上向量空间的概念，以及与之有关的维数、子空间、线性变换和凸集的概念. 我们还假定读者熟悉一般拓扑学，Hausdorff 拓扑空间，较弱和较强的拓扑，连续函数，收敛序列，拓扑积空间，子空间和相对拓扑的基本概念.

除非有相反的声明，贯穿本专著的始终一切向量空间都被认为是复数域上的向量空间.

1.4 *拓扑向量空间*，以后缩写为TVS，是一个Hausdorff拓扑空间，也是一个向量空间，对此空间向量空间的加法和数乘运算都是连续的，即，如果X是一个TVS，则分别从拓扑积空间$X\times X$和$\mathbf{C}\times X$到X中的映射

$$(x, y)\to x+y \text{ 和 } (c, x)\to cx$$

是连续的，如果X的原点的每一个邻域包含一个凸的邻域，则X是*局部凸的* TVS.

下面我们将概略地叙述一下在Sobolev空间研究中起重要作用的拓扑空间和赋范空间理论的一些方面，大部分结果都将略去证明和细节. 对于这些课题的更完全的讨论，介绍读者去看泛函分析的标准教科书，例如，Yosida[69]或Rudin[59].

1.5 我们把定义在X上的数值函数f叫做向量空间X上的*泛函*. 泛函f是线性的，假如

$$f(ax+by)=af(x)+bf(y),\quad x, y\in X, a, b\in \mathbf{C}.$$

当X是一个TVS时，X上的泛函叫做连续的，如果这个泛函从X到$\mathbf{C}$是连续的，其中$\mathbf{C}$具有由Euclid度量导出的通常的拓扑.

X上一切连续线性泛函组成的集合叫做X的*对偶空间*，并用X'来表示，在逐点的加法和数乘的意义下，X'是一个向量空间：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), (cf)(x)=cf(x),$$

$$f, g\in X', x\in X, c\in \mathbf{C}.$$

假如对X'规定一个适当的拓扑，则X'是一个TVS. 这种拓扑之一就是*弱-星拓扑*，也就是使得对每个$f\in X'$，由$F_x(f)=f(x)$定义的X'上的泛函F_x对于每个$x\in X$是连续的最弱的拓扑，例如，在1.52节中介绍的Schwartz广义函数空间中就用了这种拓扑，对于

赋范空间的对偶空间能够给出一个更强的拓扑，关于这个拓扑对偶空间本身就是一个赋范空间(1.10 节).

赋 范 空 间

1.6 向量空间 X 上的一个范数是 X 上的一个实值泛函，它满足

(i) 对一切 $x\in X$, $f(x)\geqslant 0$, 等号当且仅当 $x=0$ 时成立,

(ii) 对每个 $x\in X$ 和 $c\in\mathbf{R}$, $f(cx)=|c|f(x)$,

(iii) 对于 $x, y\in X$, $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$.

赋范空间是已经规定了范数的向量空间. 除在有些地方引入更简单的记号外，范数将用 $\|\cdot;\ X\|$ 来表示. 当 $r>0$ 时，集合

$$B_r(x)=\{y\in X: \|y-x; X\|<r\}$$

叫做中心在 $x\in X$ 半径为 r 的开球. X 的子集合 A 叫做开集，如果对每个 $x\in A$ 存在 $r>0$ 使得 $B_r(x)\subset A$, 这样定义的开集构成 X 的一个拓扑. 对这个拓扑而言 X 是一个 TVS. 这个拓扑叫做 X 上的范数拓扑，在这个拓扑下 $B_r(x)$ 的闭包是

$$\overline{B_r(x)}=\{y\in X: \|y-x; X\|\leqslant r\}.$$

一个 TVS X 叫做可赋范的，如果 X 的拓扑和由 X 上的某个范数导出的拓扑一致. 向量空间上两个不同的范数叫做等价的，如果它们导出 X 上的相同的拓扑，即，如果对某个常数 $c>0$, 对一切 $x\in X$

$$c\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\left(\frac{1}{c}\right)\|x\|_1,$$

$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个范数.

如果 X 和 Y 是两个赋范空间，又如果存在一个把 X 映到 Y 上的一对一的线性算子 L，而且对每个 $x\in X$ 具有性质 $\|L(x); Y\|=\|x; X\|$，则 L 叫做 X 和 Y 间的一个等距同构算子，而 X 和 Y 叫做等距同构的；记作 $X\cong Y$. 互相等距同构的空间常常看成是一样

的，因为它们具有同样的结构而仅有的差别只是它们的元素的性质不同而已.

1.7 赋范空间X中的序列$\{x_n\}$收敛到x_0当且仅当在$\mathbf{R}$中$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0;X\|=0$, X的范数拓扑由收敛的序列完全确定.

赋范空间X的子集合S叫做在X中稠密，如果每个$x\in X$是S中的元素构成的序列的极限. 赋范空间X叫做可分的，如果X有可数的稠密子集.

1.8 赋范空间X中的序列$\{x_n\}$叫做Cauchy序列当且仅当$\lim_{n,m\to\infty}\|x_m-x_n;X\|=0$. 如果$X$中每个Cauchy序列收敛到$X$中的一个极限，则$X$是完备的而且是一个Banach空间. 每一个赋范空间X或者是一个Banach空间或者是一个Banach空间Y的一个稠密子集，它们的范数满足

$$\|x;Y\|=\|x;X\| \qquad \text{对一切} \quad x\in X$$

如果是后面一种情况，Y叫做X的完备化.

1.9 如果X是一个向量空间，定义在$X\times X$上的泛函$(\cdot,\cdot)_X$叫做X上的内积，假如对一切$x, y, z\in X$和$a, b\in\mathbf{C}$

(i) $(x, y)_X=\overline{(y, x)_X}$,

(ii) $(ax+by, z)_X=a(x, z)_X+b(y, z)_X$,

(iii) $(x, x)_X=0$ 当且仅当 $x=0$,

其中$\bar{c}$表示$c\in\mathbf{C}$的共轭复数. 给定了这样一种内积后，X上的一种范数就能够用

$$\|x;X\|=(x, x)_X^{1/2} \tag{1}$$

来定义. 如果在这个范数下X是一个Banach空间，则X叫做Hilbert空间. 在范数是从内积经由(1)得到的任何赋范空间中，平行四边形定律

$$\|x+y;X\|^2+\|x-y;X\|^2=2\|x;X\|^2+2\|y;X\|^2 \tag{2}$$

是成立的.

赋范对偶

1.10 能够用如下方式来定义赋范空间X的对偶空间X'上的一种范数:

$$\|x';X'\|=\sup_{\substack{x\in X\\x\neq 0}}\frac{|x'(x)|}{\|x;X\|},\qquad x'\in X'.$$

由于$\mathbf{C}$是完备的，具有由这种范数导出的拓扑的X'是一个Banach空间(不论X是不是Banach空间)而且叫做X的赋范对偶.如果X是无穷维的，则X'的范数拓扑是比1.5节中定义的弱-星拓扑更强的拓扑(即具有更多的开集).

如果X是一个Hilbert空间，就能够用一种自然的方式把X和X的赋范对偶X'看成是一样的.

1.11 **定理**(Riesz表示定理)设X是一个Hilbert空间,X上的线性泛函x'属于X'当且仅当存在$x\in X$使得对一切$y\in X$有

$$x'(y)=(y,x)_X$$

这时$\|x';X'\|=\|x;X\|$. 而且x是由$x'\in X'$唯一确定的.

赋范空间X的向量子空间M本身在X的范数下是一个赋范空间,而且这样赋范的M叫做X的一个子空间. Banach空间的闭子空间是Banach空间.

1.12 **定理** (Hahn-Banach延拓定理)设M是赋范空间X的子空间. 如果$m'\in M'$,则存在$x'\in X'$,使得对一切$m\in M$, $\|x';X'\|=\|m';M'\|$而且$x'(m)=m'(m)$.

1.13 赋范空间X到其二次对偶空间$X''=(X')'$的一个自然线性内射是由映射J_X给出的，J_X在$x\in X$的值由

$$J_Xx(x')=x'(x),\quad x'\in X'$$

给出. 由于$|J_Xx(x')|\leqslant\|x';X'\|\|x;X\|$,我们有

$$\|J_Xx;X''\|\leqslant\|x;X\|.$$

另一方面，Hahn-Banach 定理保证了，对任何 $x\in X$ 能够找到一个 $x'\in X'$ 使得 $\|x';X'\|=1$，而且 $x'(x)=\|x;X\|$. 因此

$$\|J_X x; X''\| = \|x; X\|,$$

从而 J_X 就是 X 到 X'' 的一个等距同构.

如果同构的值域是全空间 X''，我们说赋范空间 X 是自反的. 自反空间必定是完备的，因此是 Banach 空间.

1.14 定理 设 X 是赋范空间，X 是自反的当且仅当 X' 是自反的. X 是可分的当且仅当 X' 是可分的. 因此，如果 X 是可分且自反的，则 X' 也是可分且自反的.

弱拓扑和弱收敛

1.15 赋范空间 X 的弱拓扑是使每个 $x'\in X'$ 仍然连续的 X 上的最弱的拓扑. 除非 X 是有限维的情形，弱拓扑比 X 上的范数拓扑更弱. Hahn-Banach 定理的一个推论就是赋范空间中的一个闭凸集在该空间的弱拓扑下也是闭的. 关于 X 上的弱拓扑收敛的序列叫做弱收敛. 于是，假如对一切 $x'\in X'$ 在 $\mathbf{C}$ 中 $x'(x_n)\to x'(x)$ 那么在 X 中 x_n 弱收敛到 x. 我们用 $x_n\to x$ 表示一个序列 $\{x_n\}$ 在 X 中依范数收敛到 x；用 $x_n\rightharpoonup x$ 来表示弱收敛. 由于 $|x'(x_n-x)|\leq\|x';X'\|\|x_n-x;X\|$ 我们知道 $x_n\to x$ 蕴涵 $x_n\rightharpoonup x$. 一般说弱收敛不一定依范数收敛.

紧　　集

1.16 赋范空间 X 的子集 A 叫做紧的，如果 A 中的每个点列包含一个子序列，该子序列在 X 中收敛到 A 中的一个元素. 紧集是闭有界集，但闭有界集不一定是紧的，除非 X 是有限维的. A 叫做准紧(Precompact)的，如果其闭包 $\bar{A}$ (在范数拓扑下)是紧的. A 叫做弱序列紧的(Weakly Sequentially Compact)，如果 A 中的每个

序列包含一个子序列，该子序列在X中弱收敛到A中的一点.Banach 空间的自反性能借助于这个性质表征出来.

1.17 定理 Banach 空间X是自反的当且仅当X的闭单位球$\overline{B_1(0)}=\{x\in X;\|x;X\|\leqslant 1\}$是弱序列紧的.

1.18 定理 集合A在 Banach 空间X中是准紧的当且仅当对于每个正数$\varepsilon>0$存在一个由X中的点构成的有限子集N_ε，具有如下性质:

$$A\subset\bigcup_{y\in N_\varepsilon}B_\varepsilon(y).$$

具有这种性质的集合N_ε叫做A的一个有限ε-网.

一致凸性

1.19 任何赋范空间关于其范数拓扑是局部凸的. X上的范数叫做一致凸的，如果对每个满足$0<\varepsilon\leqslant 2$的数ε，存在一个数$\delta(\varepsilon)>0$，使得如果$x, y\in X$满足$\|x;X\|=\|y;X\|=1$和$\|x-y;X\|\geqslant\varepsilon$，则$\|(x+y)/2;X\|\leqslant 1-\delta(\varepsilon)$. 这时赋范空间$X$本身叫做“一致凸的”. 但是要注意一致凸性是范数的性质——X可以有一个非一致凸的等价范数. 任何可赋范的空间叫做“一致凸的”如果该空间具有一个一致凸的范数. 平行四边形定律 (2) 表明 Hilbert 空间是一致凸的.

1.20 定理 一致凸的 Banach 空间是自反的.

将用下面两个定理来建立在第三章中引入的 Sobolev 空间的可分性，自反性和一致凸性.

1.21 定理 设X是 Banach 空间而且X的子空间M关于X上的范数拓扑是闭的. 则在X的范数下M本身是一个 Banach 空间. 而且

(i) 如果X是可分的，则M是可分的，

(ii) 如果X是自反的，则M是自反的，

(iii) 如果X是一致凸的，则M是一致凸的.

M的完备性，可分性和一致凸性容易从X的相应的性质得到M的自反性是定理 1.17 和闭而且凸的M在X的弱拓扑下是闭的这一事实的推论.

1.22 定理 对于 $j=1, 2, \cdots, n$, 设 X_j 是范数为$\|\cdot\|_j$ 的 Banach 空间. 由点 $x=(x_1, \cdots, x_n)$, $x_j\in X_j$, 组成的笛卡尔积空间

$$X=\prod_{j=1}^{n} X_j$$

在定义

$$x+y=(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n), \quad cx=(cx_1, \cdots, cx_n)$$

下是一个向量空间而且关于以下互相等价的范数

$$\|x\|_{(p)}=\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|_j^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|x\|_{(\infty)}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|x_j\|_j$$

中的任何一个而言是一个 Banach 空间. 而且

(i) 如果对 $1\leqslant j\leqslant n$, X_j 是可分的，则X是可分的；

(ii) 如果对 $1\leqslant j\leqslant n$, X_j 是自反的，则X是自反的；

(iii) 如果对 $1\leqslant j\leqslant n$, X_j 是一致凸的，则X是一致凸的. 更确切地说，假如 $1<p<\infty$ 则$\|\cdot\|_{(p)}$是X上一致凸的范数.

读者可以验证泛函$\|\cdot\|_{(p)}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$,实际上是$X$上的范数而且关于这些范数中的每一个$X$都是完备的. 从不等式$\|x\|_{(\infty)}\leqslant\|x\|_{(p)}\leqslant\|x\|_{(1)}\leqslant n\|x\|_{(\infty)}$可得出这些范数的等价性. X的可分性与一致凸性容易从空间X_j的相应性质得出. X的自反性可通过定理1.17或者通过X'和$\prod_{j=1}^{n} X_j'$间的一个自然同构(例如见引理3.7)从X_j, $1\leqslant j\leqslant n$, 的自反性得到.

算子和嵌入

1.23 因为赋范空间X的拓扑是由它的收敛序列决定的，定义在X上到拓扑空间Y中的算子f是连续的当且仅当在X中$x_n \to x$时在Y中就有$f(x_n) \to f(x)$. 对于任何其拓扑是由收敛序列来决定的拓扑空间X(第一可数空间)而言，也是这样的情形.

设X, Y是赋范空间而f是从X到Y中的一个算子. 算子f叫做*紧的*，如果当A在X中有界时$f(A)$是准紧的，[赋范空间中的有界集是包含在对于某个$R>0$的球$B_R(0)$中的集合]. 如果f是连续而且紧的算子，那么f是*完全连续的*. 如果当A在X中有界时$f(A)$在Y中有界，那么f是*有界的*.

每个紧算子是有界算子. 每个有界线性算子是连续算子，因此每个紧线性算子是完全连续的.

1.24 我们说赋范空间X*嵌入*到赋范空间Y，并且记作$X \to Y$来表示这种嵌入，假如

(i) X是Y的向量子空间，而且

(ii) 对一切$x \in X$由$Ix = x$定义的X到Y中的恒同算子是连续的.

因为I是线性的，(ii)等价于存在一个常数M使得

$$\|Ix; Y\| \leqslant M \|x; X\|, \qquad x \in X.$$

在某些情形X是Y的子空间和I是恒同映射的要求可以减弱为允许把X的某些典型线性变换嵌入到Y中去. (Sobolev空间的迹嵌入以及Sobolev空间嵌入到连续函数空间中去都是例子，见第五章.)

如果嵌入算子I是紧的，我们就说X*紧嵌入*到Y中.

连续函数空间

1.25 设Ω是$\mathbf{R}^n$中一个区域．对任何非负整数m，设$C^m(\Omega)$是由一切在Ω上连续的函数ϕ且其偏导数$D^\alpha\phi$，$|\alpha|\leqslant m$，也在Ω上连续的函数组成的向量空间．我们简写作$C^0(\Omega)\equiv C(\Omega)$．令$C^\infty(\Omega)=\bigcap_{m=0}^{\infty}C^m(\Omega)$．子空间$C_0(\Omega)$和$C_0^\infty(\Omega)$分别由$C(\Omega)$和$C^\infty(\Omega)$中有紧支集的函数组成.

1.26 因为Ω是开集，$C^m(\Omega)$中的函数不必在Ω上有界．如果$\phi\in C(\Omega)$在Ω上有界且一致连续，则ϕ有一个到Ω的闭包$\overline{\Omega}$的唯一的，有界且连续的延拓．因此，我们定义向量空间$C^m(\overline{\Omega})$是由$\phi\in C^m(\Omega)$，对$0\leqslant|\alpha|\leqslant m$，$D^\alpha\phi$在$\Omega$上有界且一致连续的函数组成的.［注意$C^m(\overline{\mathbf{R}^n})\neq C^m(\mathbf{R}^n)$.］$C^m(\overline{\Omega})$是一个Banach空间，其范数由

$$\|\phi;C^m(\overline{\Omega})\|=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha\phi(x)|$$

给出.

1.27 如果$0<\lambda\leqslant1$，我们定义$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$是$C^m(\overline{\Omega})$的子空间，是由$C^m(\overline{\Omega})$中的那样一些函数$\phi$组成，对于$0\leqslant|\alpha|\leqslant m$，$D^\alpha\phi$在$\Omega$中满足指数为$\lambda$的Hölder条件，即存在常数$K$使得

$$|D^\alpha\phi(x)-D^\alpha\phi(y)|\leqslant K|x-y|^\lambda,\quad x,y\in\Omega.$$

$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$是一个Banach空间，其范数由

$$\|\phi;C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})\|=\|\phi;C^m(\overline{\Omega})\|+\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}x,\ \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}}\frac{|D^\alpha\phi(x)-D^\alpha\phi(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

给出．要注意，对于$0<\nu<\lambda\leqslant1$，

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})\subsetneqq C^{m,\nu}(\overline{\Omega})\subsetneqq C^m(\overline{\Omega}).$$

$C^{m,1}(\overline{\Omega})\not\subset C^{m+1}(\overline{\Omega})$也是显然的．一般说也有$C^{m+1}(\overline{\Omega})\not\subset$

$C^{m,1}(\bar{\Omega})$，但是对某些区域 $C^{m+1}(\bar{\Omega})\subset C^{m,1}(\bar{\Omega})$是可能的，例如平均值定理所要求的凸区域就是这样一种区域(见定理 1.31)。

如果Ω是有界区域，下面两个众所周知的定理对确定$C(\bar{\Omega})$的子集合的稠密性和紧性提供了有效的判别准则。如果 $\phi\in C(\bar{\Omega})$，我们可以认为ϕ是定义在$\bar{\Omega}$上的，即把ϕ和ϕ在Ω的闭包上的唯一的连续延拓看成是一样的。

1.28 定理 (Stone-Weierstrass 定理) 设Ω是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界区域，$C(\bar{\Omega})$的子集合 $\mathbf{R}$ 在$C(\bar{\Omega})$中稠密，若 A 具有下面四条性质:

(i) 如果 ϕ, $\psi\in A$ 而 $c\in\mathbf{C}$，则 $\phi+\psi$, $\phi\psi$ 和$c\phi$ 都属于 A;

(ii) 如果 $\phi\in A$，则 $\overline{\Phi}\in A$，其中 $\overline{\Phi}$ 是ϕ 的复共轭;

(iii) 如果 $x, y\in\bar{\Omega}$, $x\neq y$，则存在 $\phi\in A$ 使得 $\phi(x)\neq\phi(y)$;

(iv) 如果 $x\in\bar{\Omega}$，则存在 $\phi\in A$ 使得 $\phi(x)\neq 0$。

1.29 推论 如果Ω在 $\mathbf{R}^n$ 中有界，则 $x=(x_1,\cdots,x_n)$的全体有理复系数多项式P在 $C(\bar{\Omega})$中稠密。(如果 $c=c_1+ic_2$，其中c_1 和 c_2 是有理数，$c\in\mathbf{C}$ 是有理复数。)因此，$C(\bar{\Omega})$是可分的。

证明 由 Stone-Weierstrass 定理，x 的多项式的全体构成的集合在 $C(\bar{\Omega})$中稠密。在紧集$\bar{\Omega}$上任何多项式能够用可数集合 P 中的元素来一致逼近，所以P也在 $C(\bar{\Omega})$中稠密。∎

1.30 定理 (Ascoli-Arzela 定理) 设Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界区域。$C(\bar{\Omega})$的子集合K在 $C(\bar{\Omega})$中是准紧的，假如下面两个条件成立:

(i) 存在常数M使得对一切 $\phi\in K$ 和 $x\in\Omega$, $|\phi(x)|\leq M$.

(ii) 对每个 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得如果 $\phi\in K$, x, $y\in\Omega$ 而且 $|x-y|<\delta$，则 $|\phi(x)-\phi(y)|<\varepsilon$.

下列定理是上面所介绍的那些空间的一个直接的嵌入定理。

1.31 定理 设 m 是一个非负整数而令 $0<\nu<\lambda\leq 1$。则存在下列嵌入关系:

$$C^{m+1}(\bar{\Omega})\longrightarrow C^m(\bar{\Omega}), \tag{3}$$

$$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})\longrightarrow C^{m}(\bar{\Omega}), \tag{4}$$

$$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})\longrightarrow C^{m,\nu}(\bar{\Omega}). \tag{5}$$

如果Ω是有界的，则嵌入(4)和(5)是紧的. 如果Ω是凸的，就有更进一步的嵌入关系

$$C^{m+1}(\bar{\Omega})\longrightarrow C^{m,1}(\bar{\Omega}), \tag{6}$$

$$C^{m+1}(\bar{\Omega})\longrightarrow C^{m,\nu}(\bar{\Omega}). \tag{7}$$

如果Ω是有界凸区域，则嵌入(3)和(7)是紧的.

证明 从明显的不等式

$$\|\phi; C^m(\bar{\Omega})\|\leqslant\|\phi; C^{m+1}(\bar{\Omega})\|,$$

$$\|\phi; C^m(\bar{\Omega})\|\leqslant\|\phi; C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})\|$$

立即得到嵌入(3)和(4)的存在性. 为了证实(5)，我们注意到对于$|\alpha|\leqslant m$,

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\0<|x-y|<1}}\frac{|D^\alpha\phi(x)-D^\alpha\phi(y)|}{|x-y|^\nu}\leqslant\sup_{x,y\in\Omega}\frac{|D^\alpha\phi(x)-D^\alpha\phi(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

和

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\|x-y|\geqslant1}}\frac{|D^\alpha\phi(x)-D^\alpha\phi(y)|}{|x-y|^\nu}\leqslant2\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha\phi(x)|,$$

由此我们得到

$$\|\phi; C^{m,\nu}(\bar{\Omega})\|\leqslant3\|\phi; C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})\|.$$

如果Ω是凸的且$x, y\in\Omega$，则由平均值定理，在联结x和y的线段上存在一点$z\in\Omega$使得$D^\alpha\phi(x)-D^\alpha\phi(y)=(x-y)\cdot\nabla D^\alpha\phi(z)$，其中$\nabla u=(D_1u, D_2u, \cdots, D_nu)$. 于是

$$|D^\alpha\phi(x)-D^\alpha\phi(y)|\leqslant n|x-y|\|\phi; C^{m+1}(\bar{\Omega})\|, \tag{8}$$

所以

$$\|\phi;C^{m,1}(\overline{\Omega})\|\leqslant n\|\phi;C^{m+1}(\overline{\Omega})\|.$$

因此证明了(6)，从(5)和(6)就得到(7).

现在假定Ω是有界的. 如果A是$C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$中的有界集，则存在$M$使得对一切$\phi\in A$，$\|\phi;C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})\|\leqslant M$. 但对一切$\phi\in A$和一切$x$，$y\in\Omega$，$|\phi(x)-\phi(y)|\leqslant M|x-y|^{\lambda}$，根据定理1.30，$A$是$C(\overline{\Omega})$中的准紧集. 这就证明了$m=0$时(4)是紧的. 如果$m\geqslant 1$而且$A$在$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$中是有界的，则$A$在$C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$中有界而且存在序列$\{\phi_j\}\subset A$使得在$C(\overline{\Omega})$中$\phi_j\to\phi$. 但$\{D_1\phi_j\}$在$C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$中也是有界的，所以$\{\phi_j\}$有一个子序列，仍记作$\{\phi_j\}$使得在$C(\overline{\Omega})$中$D_1\phi_j\to\psi_1$. $C(\overline{\Omega})$中的收敛性就是在Ω上的一致收敛，我们有$\psi_1=D_1\phi$. 我们可以继续以这样的方式抽取子序列，直到我们得到一个子序列，它在$C(\overline{\Omega})$中对每个α，$0\leqslant|\alpha|\leqslant m$，都有$D^\alpha\phi_j\to D^\alpha\phi$. 这就证明了(4)的紧性. 关于(5)的紧性我们论证如下，对$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$的有界子集中的一切$\phi$

$$\frac{|D^\alpha\phi(x)-D^\alpha\phi(y)|}{|x-y|^\nu}=\left(\frac{|D^\alpha\phi(x)-D^\alpha\phi(y)|}{|x-y|^\lambda}\right)^{\nu/\lambda}\times|D^\alpha\phi(x)-D^\alpha\phi(y)|^{1-\nu/\lambda}$$
$$\leqslant\mathrm{const}\,|D^\alpha\phi(x)-D^\alpha\phi(y)|^{1-\nu/\lambda}. \qquad (9)$$

因为(9)式表明任何在$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$中有界且在$C^m(\overline{\Omega})$中收敛的序列也在$C^{m,\nu}(\overline{\Omega})$中收敛，由(4)的紧性就得到(5)的紧性.

最后，如果Ω是凸且有界的，把连续嵌入(6)和$\lambda=1$时的紧嵌入(4)和(5)结合起来就得到(3)和(7)的紧性. ∎

在比Ω的凸性更弱的条件下能得到嵌入(6)和(7)的存在性以及(3)和(7)的紧性. 例如，如果任何点对$x,y\in\Omega$能用Ω中长度不超过$|x-y|$的某个固定倍数的可求长弧连起来的话，那么我们能得到一个和(8)类似的不等式，从而完成证明. 请读者证明(6)不是紧的.

$\mathbf{R}^n$ 中的 Lebesgue 测度

1.32 本专著所研究的许多函数空间是由 $\mathbf{R}^n$ 的区域上的 Lebesgue 意义下可积函数组成的. 我们假定多数读者是熟悉 Lebesgue 测度和积分的, 即使如此本书中还是包含了 Lebesgue 理论的一个简短的讨论, 特别是和以后要研究的 L^p 空间和 Sobolev 空间有关的那些方面. 所有的证明都略去了. 关于 Lebesgue 理论以及更一般的测度和积分的更完全和更系统的讨论, 读者可以参考任何一本关于积分论的标准著作, 例如 Munroe 的书[48].

1.33 $\mathbf{R}^n$ 中一组子集 Σ 叫做一个 σ -代数, 如果下列条件成立:

(i) $\mathbf{R}^n \in \Sigma$.

(ii) 如果 $A \in \Sigma$, 则 $A^c = \{x \in \mathbf{R}^n: x \notin A\} \in \Sigma$.

(iii) 如果 $A_j \in \Sigma$, $j=1, 2, \cdots$, 则 $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma$.

从(i)到(iii)立得

(iv) $\varnothing \in \Sigma$.

(v) 如果 $A_j \in \Sigma$, $j=1, 2, \cdots$, 则 $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma$.

(vi) 如果 $A, B \in \Sigma$, 则 $A - B = A \cap B^c \in \Sigma$.

1.34 Σ 上的一个测度 μ 指的是 Σ 上的一个函数, 函数值或取在 $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 中(正测度)或取在 $\mathbf{C}$ 中(复测度), 这个函数在如下意义下是可数可加的, 当 $A_j \in \Sigma$, $j=1, 2, \cdots$, 而且对 $j \neq k$, $A_j \cap A_k = \varnothing$ 时

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

(对复测度而言, 对任何这种序列 $\{A_j\}$, 若右端的级数收敛, 一定是

绝对收敛的.)如果 μ 是一个正测度，又如果 $A, B\in\Sigma$ 而且 $A\subset B$，则 $\mu(A)\leqslant\mu(B)$. 还有,如果 $A_j\in\Sigma$, $j=1, 2, \cdots$ 和 $A_1\subset A_2\subset\cdots$ 则

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)=\lim_{j\to\infty}\mu(A_j).$$

1.35 定理 存在一个由 $\mathbf{R}^n$ 中的子集合组成的 σ-代数 Σ 以及一个具有下列性质的 Σ 上的正测度 μ:

（i）$\mathbf{R}^n$ 中每个开集属于 Σ.

（ii）如果 $A\subset B$, $B\in\Sigma$, 而且 $\mu(B)=0$, 则 $A\in\Sigma$ 而且 $\mu(A)=0$.

（iii）如果 $A=\{x\in\mathbf{R}^n: a_j\leqslant x_j\leqslant b_j, j=1, 2, \cdots, n\}$, 则 $A\in\Sigma$ 而且 $\mu(A)=\prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j)$.

（iv）μ 是一个平移不变量, 即, 如果 $x\in\mathbf{R}^n$ 而且 $A\in\Sigma$, 则

$$x+A=\{x+y: y\in A\}\in\Sigma \text{ 而且 } \mu(x+A)=\mu(A).$$

Σ 的元素叫做 $\mathbf{R}^n$ 的(Lebesgue)可测子集；μ 叫做 $\mathbf{R}^n$ 中的(Lebesgue)测度.（当我们所需要的只是 $\mathbf{R}^n$ 的测度时，在这些术语中将不用"Lebesgue"这个词)，对于 $A\in\Sigma$，我们把 $\mu(A)$ 叫做 A 的测度或 A 的体积，因为 Lebesgue 测度是 $\mathbf{R}^3$ 中体积概念的自然推广. 我们不去考虑"测度"和"体积"形式上的区别, 对于在几何上容易形象化的集合(球, 立方体区域), 我们常常采用"体积"这一术语, 而且写作 vol$A$ 来代替 $\mu(A)$. 在 $\mathbf{R}^1$ 和 $\mathbf{R}^2$ 中术语长度和面积比体积更合适.

1.36 如果 $B\subset A\subset\mathbf{R}^n$ 而且 $\mu(B)=0$，则任何在集合 $A-B$ 的一切点上成立的条件叫做在 A 中几乎处处(a. e.)成立的条件. 易见 $\mathbf{R}^n$ 中可数集的测度为零, 但其逆不真.

在可测集上定义而且在 $\mathbf{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ 中取值的函数叫做可测函数，如果对一切实数 a, 集合

$$\{x: f(x)>a\}$$

是可测的. 可测函数的一些比较重要的性质列在下面的定理中.

1.37 定理 (a) 如果 f 是可测函数, 则 $|f|$ 也是可测函数.

(b) 如果 f 和 g 是实值可测函数, 则 $f+g$ 和 fg 也是实值可测函数.

(c) 如果 $\{f_n\}$ 是一个可测函数序列, 则 $\sup\limits_n f_n, \inf\limits_n f_n, \limsup\limits_{n\to\infty} f_n, \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ 都是可测函数.

(d) 如果 f 是定义在可测集上的连续函数, 则 f 是可测函数,

(e) 如果 f 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 中的连续函数, 而 g 是实值可测函数, 则由 $f\circ g(x)=f(g(x))$ 定义的复合函数 $f\circ g$ 是可测函数.

(f) (Lusin 定理) 如果 f 是可测函数, 而对 $x\in A^c$, $\mu(A)<\infty$, $f(x)=0$, 又如果 $\varepsilon>0$, 则存在一个函数 $g\in C_0(A)$ 使得

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|g(x)|\leqslant\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|f(x)| \text{ 而且 } \mu\{x\in\mathbf{R}^n: f(x)\neq g(x)\}<\varepsilon.$$

1.38 设 $A\subset\mathbf{R}^n$, 由

$$\chi_A=\begin{cases}1 & \text{当 } x\in A \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } x\notin A \text{ 时}\end{cases}$$

定义的函数 χ_A 叫做 A 的特征函数. $\mathbf{R}^n$ 上的一个实值函数 s 叫做简单函数, 如果 s 的值域是有限个实数. 如果对于一切 x, $s(x)\in\{a_1, \cdots, a_m\}$, 则显然有 $s=\sum\limits_{j=1}^{m}a_j\chi_{A_j}$, 其中 $A_j=\{x\in\mathbf{R}^n: s(x)=a_j\}$, 而且 s 是可测的当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是可测的. 由于下面的逼近定理, 简单函数在积分论中是一个非常有用的工具.

1.39 定理 给定一个定义域为 $A\subset\mathbf{R}^n$ 的实值函数, 存在一个简单函数的序列 $\{s_n\}$, $\{s_n\}$ 在 A 上点收敛到 f. 如果 f 是有界的, 则可以选到一致收敛到 f 的简单函数序列 $\{s_n\}$. 如果 f 是可测函数, 则每个 s_n 都可以选为可测函数. 如果 f 是非负的, 那么可以选到序列 $\{s_n\}$ 使得在每一点上 $\{s_n\}$ 是单调增加的.

Lebesgue 积分

1.40 现在我们能够给定义在可测集 $A\subset\mathbf{R}^n$ 上的实值可测函数的(Lebesgue)积分下定义了. 对于简单函数 $s=\sum_{j=1}^{m}a_j\chi_{A_j}$, 其中 $A_j\subset A$, A_j 是可测的, 我们定义

$$\int_A s(x)dx=\sum_{j=1}^{m}a_j\mu(A_j) \tag{10}$$

如果 f 是非负可测函数, 我们定义

$$\int_A f(x)dx=\sup\int_A s(x)dx \tag{11}$$

其中上确界是对在 A 外等于零而在 A 中满足 $0\leqslant s(x)\leqslant f(x)$ 的可测简单函数 $s(x)$ 取的. 如果 $f(x)$ 是非负简单函数, 则由(10)和(11)给出的 $\int_A f(x)dx$ 的两个定义是一致的. 注意非负函数的积分可以是 $+\infty$.

如果 f 是实值可测函数, 我们令 $f=f^+-f^-$, 其中
$f^+=\max(f,0)$ 而 $f^-=-\min(f,0)$, 它们都是非负可测函数. 假如右端的两个积分至少有一个是有限的, 我们定义

$$\int_A f(x)dx=\int_A f^+(x)dx-\int_A f^-(x)dx.$$

如果上式中的右端的两个积分都是有限的, 我们说 f 是 A 上的(Lebesgue)可积函数, A 上的可积函数类记作 $L^1(A)$.

1.41 **定理** 假定下面出现的一切函数和集合都是可测的.

(*a*) 如果 f 在 A 上有界而且 $\mu(A)<\infty$, 则 $f\in L^1(A)$.

(*b*) 如果对一切 $x\in A$, $a\leqslant f(x)\leqslant b$, 又如果 $\mu(A)<\infty$, 则

$$a\mu(A)\leqslant\int_A f(x)dx\leqslant b\mu(A).$$

(*c*) 如果对一切 $x\in A$, $f(x)\leqslant g(x)$, 又如果 f,g 的积分都存

在，则

$$\int_A f(x)dx \leqslant \int_A g(x)dx.$$

(d) 如果 $f, g \in L^1(A)$，则 $f+g \in L^1(A)$ 而且

$$\int_A (f+g)(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx.$$

(e) 如果 $f \in L^1(A)$ 而 $c \in \mathbf{R}$，则 $cf \in L^1(A)$，而且

$$\int_A (cf)(x)dx = c\int_A f(x)dx.$$

(f) 如果 $f \in L^1(A)$，则 $|f| \in L^1(A)$，而且

$$\left|\int_A f(x)dx\right| \leqslant \int_A |f(x)|dx.$$

(g) 如果 $f \in L^1(A)$ 而 $B \subset A$，则 $f \in L^1(B)$；此外，如果对一切 $x \in A$，$f(x) \geqslant 0$，则

$$\int_B f(x)dx \leqslant \int_A f(x)dx.$$

(h) 如果 $\mu(A)=0$，则 $\int_A f(x)dx = 0$.

(i) 如果 $f \in L^1(A)$，又如果对一切 $B \subset A$ 有 $\int_B f(x)dx = 0$，则在 A 上几乎处处有 $f(x)=0$.

1.42 定理 如果 f 是 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 中的一个元素或是 $\mathbf{R}^n$ 上的非负可测函数，则由

$$\lambda(A) = \int_A f(x)dx$$

定义的集合函数 λ 是可数可加的，因此在由 $\mathbf{R}^n$ 的 Lebesgue 可测子集构成的 σ-代数上 $\lambda(A)$ 是一个测度.

积分的这种可加性的一个推论是对于积分来说测度为零的子集可以忽略，即，如果 f 和 g 是 A 上的可测函数而且在 A 上 $f(x) = g(x)$ a. e.，则 $\int_A f(x)dx = \int_A g(x)dx$. 因此，$L^1(A)$ 中两个几乎处

处相等的函数被看作是一样的.

下面三个定理涉及积分和极限过程的交换问题.

1.43 定理 (单调收敛定理) 设 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是可测集, 而 $\{f_n\}$ 是一个可测函数序列, 对一切 $x\in A$ 满足 $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx=\int_A(\lim_{n\to\infty}f_n(x))dx.$$

1.44 (Fatou 引理) 设 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是可测集, 又设 $\{f_n\}$ 是一个非负可测函数序列. 则

$$\int_A(\liminf_{n\to\infty}f_n(x))dx\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx.$$

1.45 定理 (控制收敛定理)设 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是可测集, 又设可测函数序列 $\{f_n\}$ 在 A 上逐点收敛到一个极限函数. 如果存在一个函数 $g\in L^1(A)$ 使得对一切 n 和一切 $x\in A$ 有 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx=\int_A(\lim_{n\to\infty}f_n(x))dx.$$

1.46 可测集 $A\subset\mathbf{R}^n$ 上复值函数的积分定义如下. 令 $f=u+iv$, 其中 u 和 v 是实值的, f 叫做可测的当且仅当 u, v 都是可测函数. 假如 $|f|=(u^2+v^2)^{1/2}$ 在 1.40 节所说的意义下属于 $L^1(A)$, 我们就说 f 在 A 上是可积的, 且记作 $f\in L^1(A)$. 对于 $f\in L^1(A)$ 而且只是对这种 f, f 的积分由

$$\int_A f(x)dx=\int_A u(x)dx+i\int_A v(x)dx$$

定义. 容易验证 $f\in L^1(A)$ 当且仅当 $u, v\in L^1(A)$. 定理 1.37(a, b, d—f), 定理 1.41(a, d—i), 定理 1.42[假定 $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$] 以及定理 1.45 都可以推广到 f 是复的情形.

下面的定理使我们能够借助于 Lebesgue 测度 μ 来表示某些复测度, 它是定理 1.42 的逆定理.

1.47 定理 (Radon-Nikodym 定理) 设 λ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上

的 Lebesgue 可测子集构成的 σ-代数 Σ 上的复测度. 假定对一切使 $\mu(A)=0$ 的 $A\in\Sigma$, $\lambda(A)=0$, 则存在 $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$ 使得对一切 $A\in\Sigma$

$$\lambda(A)=\int_A f(x)dx.$$

函数 f 由 λ 在差一个零测集的意义下完全确定.

1.48 如果 f 是定义在 $\mathbf{R}^{n+m}$ 的子集 A 上的函数, 我们可以认为 f 是依赖于一对变量 (x, y) 的函数, $x\in\mathbf{R}^n$ 而 $y\in\mathbf{R}^m$, f 在 A 上的积分通常表为

$$\int_A f(x, y)dxdy,$$

或者, 如果还要求在 $\mathbf{R}^{n+m}$ 都有积分的话, 还可表为

$$\int_{\mathbf{R}^{n+m}} f(x, y)\chi_A(x, y)dxdy,$$

其中 χ_A 是 A 的特征函数. 特别, 如果 $A\subset\mathbf{R}^n$, 我们可以写为

$$\int_A f(x)dx=\int_A f(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n.$$

1.49 定理 (Fubini 定理) 设 f 是 $\mathbf{R}^{n+m}$ 上的可测函数而且假定积分

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbf{R}^{n+m}} |f(x, y)|dxdy, \\
I_2 &= \int_{\mathbf{R}^m}\left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x, y)|dx\right)dy, \qquad (12)\\
I_3 &= \int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^m} |f(x, y)|dy\right)dx
\end{aligned}
$$

中至少有一个存在且有限, 则

(a) 对于几乎一切 $y\in\mathbf{R}^m$, $f(\cdot, y)\in L^1(\mathbf{R}^n)$,

(b) 对于几乎一切 $x\in\mathbf{R}^n$, $f(x, \cdot)\in L^1(\mathbf{R}^m)$,

(c) $\int_{\mathbf{R}^n} f(x, \cdot)dx\in L^1(\mathbf{R}^m)$,

(d) $\int_{\mathbf{R}^m} f(\cdot, y)dy \in L^1(\mathbf{R}^n)$, 而且

(e) $I_1 = I_2 = I_3$.

广义函数和弱导数

1.50 在后面几章中我们需要 Schwartz 广义函数论[60]中的某些基本概念和技巧. 这里把与我们有关的广义函数论的那些方面作一个简单的介绍, 特别重要的是可积函数的弱导数或广义函数意义下的导数概念. Sobolev 空间的一种标准定义就是用这种导数作为语言表示出来的(3.1节). 对于下面要引进的空间$\mathscr{D}(\Omega)$和$\mathscr{D}'(\Omega)$以及这些空间的推广的更全面的讨论, 除文献[60]外介绍读者去看 Rudin 的[59]和 Yosida 的[69].

1.51 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域. $C_0^\infty(\Omega)$中的一个函数序列$\{\phi_n\}$叫做在 $\mathscr{D}(\Omega)$空间的意义下收敛到函数 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 假如满足以下的条件:

(i) 存在 $K \subset\subset \Omega$ 使得对一切 n, $\operatorname{supp}(\phi_n - \phi) \subset K$, 而且

(ii) 对于每个多重指标 α, $\lim_{n\to\infty} D^\alpha \phi_n(x) = D^\alpha \phi(x)$在$K$上是一致的.

在向量空间 $C_0^\infty(\Omega)$ 上存在一个局部凸拓扑, 关于这个拓扑一个线性泛函是连续的充要条件是当在 $\mathscr{D}(\Omega)$空间意义下 $\phi_n \to \phi$ 时在 $\mathbf{C}$ 中就有 $T(\phi_n) \to T(\phi)$. 这个 TVS 就叫做 $\mathscr{D}(\Omega)$, 而它的元素叫做试验函数. $\mathscr{D}(\Omega)$不是一个可赋范的空间. (我们不去过问上面所说的拓扑的唯一性问题. 这个拓扑唯一地决定了$\mathscr{D}(\Omega)$的对偶空间, 对于我们说来有这一点就足够了.)

1.52 $\mathscr{D}(\Omega)$的对偶空间 $\mathscr{D}'(\Omega)$叫做(Schwartz)广义函数空间. 作为 $\mathscr{D}(\Omega)$ 的对偶赋予 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 以弱星拓扑, 从而关于这种拓扑$\mathscr{D}'(\Omega)$是一个局部凸 TVS. 我们综述 $\mathscr{D}'(\Omega)$中向量空间的运算

和收敛运算如下：如果 $S, T, T_n \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 而 $c \in \mathbf{C}$，则

$$(S+T)(\phi)=S(\phi)+T(\phi),\ \phi\in\mathscr{D}(\Omega),$$
$$(cT)(\phi)=cT(\phi),\qquad \phi\in\mathscr{D}(\Omega),$$

在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中 $T_n \to T$ 当且仅当对一切 $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ 在 $\mathbf{C}$ 中 $T_n(\phi) \to T(\phi)$.

1.53 Ω 上几乎处处有定义的函数 u 叫做在 Ω 上局部可积的，假如对每个可测集 $A \subset\subset \Omega$，$u \in L^1(A)$. 这时我们记作 $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. 与每个 $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 对应存在一个由

$$T_u(\phi)=\int_\Omega u(x)\phi(x)dx,\qquad \phi\in\mathscr{D}(\Omega) \tag{13}$$

定义的广义函数 $T_u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. 显然这样定义的 T_u 是 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上的线性泛函. 为了看出它是连续的，假定在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中 $\phi_n \to \phi$. 则存在 $K \subset\subset \Omega$ 使得对 $n=1, 2, 3, \cdots$, $\operatorname{supp}(\phi_n-\phi) \subset K$. 于是

$$|T_u(\phi_n)-T_u(\phi)|\leqslant\sup_{x\in K}|\phi_n(x)-\phi(x)|\int_K|u(x)|dx.$$

因为在 K 上一致地有 $\phi_n \to \phi$，上述不等式的右端当 $n\to\infty$ 时趋于零.

1.54 并非每个广义函数 $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 都可对某个 $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 表为[由(13)定义的]形式 $T=T_u$. 实际上，假定 $0 \in \Omega$，读者可以相信不可能存在 Ω 上的局部可积函数 δ 使得对一切 $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega \delta(x)\phi(x)dx=\phi(0).$$

但是，易见由

$$\delta(\phi)=\phi(0) \tag{14}$$

给出的定义在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上的线性泛函 δ 是连续的，因此是 Ω 上的一个广义函数.

1.55 设 $u \in C^1(\Omega)$ 而 $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. 因为在 Ω 的某个紧子集外 ϕ 恒等于零，对变量 x_j 分部积分得到

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}u(x)\right)\phi(x)dx=-\int_\Omega u(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)\right)dx$$

类似地，如果 $u\in C^{|\alpha|}(\Omega)$，分部积分 $|\alpha|$ 次就导致

$$\int_\Omega(D^\alpha u(x))\phi(x)dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha\phi(x)dx.$$

这就启发了以下关于广义函数 $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 的导数 $D^\alpha T$ 的定义：

$$(D^\alpha T)(\phi)=(-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\phi) \tag{15}$$

因为当 $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$ 时 $D^\alpha\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$，$D^\alpha T$ 是 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上的一个泛函. 显然 $D^\alpha T$ 在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上是线性的. 我们将证明 $D^\alpha T$ 是连续的，因而是 Ω 上的广义函数. 为此，假定在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中 $\phi_n\to\phi$，则对某个 $K\subset\subset\Omega$

$$\operatorname{supp}(D^\alpha(\phi_n-\phi))\subset\operatorname{supp}(\phi_n-\phi)\subset K.$$

而且

$$D^\beta[D^\alpha(\phi_n-\phi)]=D^{\beta+\alpha}(\phi_n-\phi)$$

当 $n\to\infty$ 时对每个多重指标 β 在 K 上一致收敛到零. 因此在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中 $D^\alpha\phi_n\to D^\alpha\phi$. 因为 $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$，就得到在 $\mathbf{C}$ 中

$D^\alpha T(\phi_n)=(-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\phi_n)\to(-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\phi)=D^\alpha T(\phi)$，于是 $D^\alpha T\in\mathscr{D}'(\Omega)$.

我们已经证明 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中的每个广义函数在定义(15)的意义下在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中有任意阶的导数，而且从 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 到 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中的映射是连续的. 如果在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中 $T_n\to T$，又如果 $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$，则

$$D^\alpha T_n(\phi)=(-1)^{|\alpha|}T_n(D^\alpha\phi)\to(-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\phi)=D^\alpha T(\phi).$$

1.56 例子 (1)如果 $0\in\Omega$ 而 $\delta\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 是由(14)定义的，则 $D^\alpha\delta$ 由

$$D^\alpha\delta(\phi)=(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\phi(0)$$

给出.

(2) 如果 $\Omega=\mathbf{R}$(即 $n=1$)且 $H\in L^1_{loc}(\Omega)$ 是由

$$H(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x\geq 0\\ 0 & \text{当 } x<0\end{cases}$$

定义的，则导数$(T_H)'$是δ，因为如果$\phi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$在区间$[-a, a]$中有支集，则

$$(T_H)'(\phi)=-T_H(\phi')=-\int_0^a \phi'(x)dx=\phi(0)=\delta(\phi).$$

1.57 现在我们来定义局部可积函数弱导数的概念. 设$u\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. 使得在$\mathscr{D}'(\Omega)$中$T_{v_\alpha}=D^\alpha(T_u)$成立的函数$v_\alpha\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$不一定存在. 如果这样的$v_\alpha$存在，在差一个零测集的意义下$v_\alpha$是唯一的，而且把$v_\alpha$叫做$u$的弱偏导数或广义函数意义下的偏导数，用$D^\alpha u$来记. 于是假如$v_\alpha\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$对一切$\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$满足

$$\int_\Omega u(x)D^\alpha\phi(x)dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v_\alpha(x)\phi(x)dx$$

则在弱(广义函数)的意义下$D^\alpha u=v_\alpha$.

如果u是具有通常(古典)意义下连续偏导数$D^\alpha u$的充分光滑的函数，则$D^\alpha u$也是u的广义函数意义下的偏导数. 当然$D^\alpha u$可以在古典意义下不存在而在广义函数意义下存在，例如$\mathbf{R}$上除有限个点外有有界导数的连续函数u，具有广义函数意义下的导数. 在定理3.16中我们将证明具有弱导数的函数能用光滑函数来逼近.

1.58 最后我们注意到能用光滑函数去乘Ω上的广义函数. 如果$T\in\mathscr{D}'(\Omega)$而且$\omega\in C^\infty(\Omega)$，积$\omega T\in\mathscr{D}'(\Omega)$由

$$(\omega T)(\phi)=T(\omega\phi),\ \phi\in\mathscr{D}(\Omega)$$

定义. 如果对某个$u\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$，$T=T_u$，则$\omega T=T_{\omega u}$. 容易验证Leibniz法则(见1.1节)对$D^\alpha(\omega T)$成立.

第二章　空间 $L^p(\Omega)$

定义和基本性质

2.1　设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个区域，又设 p 是正实数．我们用 $L^p(\Omega)$ 表示定义在 Ω 上，所有满足

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \tag{1}$$

的可测函数 u 构成的函数类．在 $L^p(\Omega)$ 中，我们把在 Ω 上几乎处处相等的函数看成是一样的．因此 $L^p(\Omega)$ 中的元素实际上是满足(1)的可测函数的等价类．两个函数是等价的，如果它们几乎处处相等．但是，为了方便起见，我们忽略了这种差别，当 u 满足(1)时就写作 $u\in L^p(\Omega)$，当在 Ω 中 $u(x)=0$ a. e. 时，就说在 $L^p(\Omega)$ 中 $u=0$．显然，如果 $u\in L^p(\Omega)$ 且 $c\in\mathbf{C}$，则 $cu\in L^p(\Omega)$．而且，如果 $u, v\in L^p(\Omega)$，那么由于

$$\begin{aligned}|u(x)+v(x)|^p &\leqslant (|u(x)|+|v(x)|)^p\\ &\leqslant 2^p(|u(x)|^p+|v(x)|^p),\end{aligned}$$

因此 $u+v\in L^p(\Omega)$，所以 $L^p(\Omega)$ 是一个向量空间．

2.2　假如 $1\leqslant p<\infty$，我们现在来验证由

$$\|u\|_p=\left\{\int_\Omega |u(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

定义的泛函 $\|\cdot\|_p$ 是 $L^p(\Omega)$ 上的一个范数．（如果 $0<p<1$ 它不是范数．）在论证中凡是可能发生区域混淆的时候，我们将用 $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ 来代替 $\|\cdot\|_p$．显然 $\|u\|_p\geqslant 0$，而且等号当且仅当在 $L^p(\Omega)$ 中 $u=0$ 时成立．而且

$$\|cu\|_p=|c|\,\|u\|_p,\quad c\in\mathbf{C}.$$

剩下还要证明，当 $1\leqslant p<\infty$ 时

$$\|u+v\|_p\leqslant\|u\|_p+\|v\|_p \tag{2}$$

这就是众所周知的 Minkowski 不等式. 对于 $p=1$, 条件(2)一定成立，因为

$$\int_\Omega|u(x)+v(x)|dx\leqslant\int_\Omega|u(x)|dx+\int_\Omega|v(x)|dx.$$

当 $1<p<\infty$ 时，我们用 p' 表示数 $p/(p-1)$，所以 $1<p'<\infty$，且

$$(1/p)+(1/p')=1.$$

p' 叫做 p 的共轭指数.

2.3 定理 (Hölder 不等式) 如果 $1<p<\infty$ 而且 $u\in L^p(\Omega)$, $v\in L^{p'}(\Omega)$，则 $uv\in L^1(\Omega)$，并且

$$\int_\Omega|u(x)v(x)|dx\leqslant\|u\|_p\|v\|_{p'} \tag{3}$$

证明 对于 $t\geqslant 0$, 函数 $f(t)=(t^p/p)+(1/p')-t$ 的最小值为 0, 而且这个最小值只在 $t=1$ 达到. 对于非负数 a, b, 令 $t=ab^{-p'/p}$, 得到

$$ab\leqslant(a^p/p)+(b^{p'}/p'), \tag{4}$$

等号当且仅当 $a^p=b^{p'}$ 时成立，如果 $\|u\|_p=0$ 或 $\|v\|_{p'}=0$, 那么在 Ω 中 $u(x)v(x)=0$ a. e. 所以(3)成立. 不然的话, 在(4)式中令 $a=|u(x)|/\|u\|_p$ 和 $b=|v(x)|/\|v\|_{p'}$, 在 Ω 上积分就得到(3), (3)中等号当且仅当在 Ω 中 $|u(x)|^p$ 和 $|v(x)|^{p'}$ 几乎处处成比例时才成立. ∎

我们指出用同样的方式能证明有限和或无限和形式的Hölder不等式

$$\Sigma|a_kb_k|\leqslant\{\Sigma|a_k|^p\}^{\frac{1}{p}}\{\Sigma|b_k|^{p'}\}^{\frac{1}{p'}}.$$

2.4 定理 (Minkowski 不等式) 如果 $1\leqslant p<\infty$，则

$$\|u+v\|_p\leqslant\|u\|_p+\|v\|_p. \tag{5}$$

证明 $p=1$ 的情形我们早已证明，所以假定 $1<p<\infty$. 我们还可

以假定 $u, v\in L^p(\Omega)$，因为不然的话(5)式的右端是无穷. 分别应用 Hölder 不等式得到

$$\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p dx$$
$$\leqslant \int_\Omega |u(x)+v(x)|^{p-1}(|u(x)|+|v(x)|)dx$$
$$\leqslant \left\{\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p dx\right\}^{1/p'} (\|u\|_p+\|v\|_p).$$

由于 $\|u+v\|_p<\infty$，在不等式两边消去 $\left\{\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p'}}$，就得到不等式(5). ▌

2.5 Ω 上的可测函数 u 叫做在 Ω 上本性有界，假如存在一个常数 K 使得在 Ω 上 $|u(x)|\leqslant K$ a.e.. 常数 K 的下确界叫做 u 在 Ω 上的本性上确界并用 $\operatorname*{ess\ sup}_{x\in\Omega}|u(x)|$ 来表示. 我们用 $L^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上全体本性有界函数 u 组成的向量空间，和前面一样，把 Ω 上几乎处处相等的函数看成是一样的. 容易验证，由

$$\|u\|_\infty=\operatorname*{ess\ sup}_{x\in\Omega}|u(x)|$$

定义的泛函 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $L^\infty(\Omega)$ 上的一个范数. 而且，显然可以把 Hölder 不等式(3)推广到包括 $p=1$，$p'=\infty$ 和 $p=\infty, p'=1$ 这两种情形.

下面两个定理建立了 $0<p<1$ 情形的 Hölder 和 Minkowski 不等式的逆形式. 以后在证明某些 L^p-空间的一致凸性时将要用到后一个不等式.

2.6 定理 设 $0<p<1$，因此 $p'=p/(p-1)<0$. 假定 $f\in L^p(\Omega)$，和

$$0<\int_\Omega |g(x)|^{p'}dx<\infty$$

则

$$\int_{\Omega}|f(x)g(x)|dx \geqslant \left\{\int_{\Omega}|f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{\Omega}|g(x)|^{p'}dx\right\}^{\frac{1}{p'}} \quad (6)$$

证明 我们可以假定 $fg\in L^1(\Omega)$，否则(6)的左端成为无穷大. 令 $\phi=|g|^{-p}$ 和 $\psi=|fg|^p$, 因此 $\phi\psi=|f|^p$. 则 $\psi\in L^q(\Omega)$, 其中 $q=\dfrac{1}{p}>1$, 而且由于 $p'=-pq'$, 其中 $q'=q/(q-1)$, 我们有 $\phi\in L^{q'}(\Omega)$. 直接利用 Hölder 不等式(3)我们有

$$\int_{\Omega}|f(x)|^p dx=\int_{\Omega}\phi(x)\psi(x)dx\leqslant\|\psi\|_q\|\phi\|_{q'}$$

$$=\left\{\int_{\Omega}|f(x)g(x)|dx\right\}^p\left\{\int_{\Omega}|g(x)|^{p'}dx\right\}^{1-p}$$

开 p 次方，再除以右端最后那个因子，就得到(6)式. ▮

2.7 定理 设 $0<p<1$. 如果 $u,v\in L^p(\Omega)$, 则

$$\||u|+|v|\|_p\geqslant\|u\|_p+\|v\|_p. \quad (7)$$

证明 如果在 $L^p(\Omega)$ 中 $u=v=0$, 则 (7) 式总是成立的. 否则, (7)的左端大于零. 应用逆 Hölder 不等式(6), 得到

$$\||u|+|v|\|_p^p=\int_{\Omega}(|u(x)|+|v(x)|)^{p-1}(|u(x)|+|v(x)|)dx$$

$$\geqslant\left\{\int_{\Omega}(|u(x)|+|v(x)|)^{(p-1)p'}dx\right\}^{1/p'}(\|u\|_p+\|v\|_p)$$

$$=\||u|+|v|\|_p^{p/p'}(\|u\|_p+\|v\|_p)$$

消去 $\||u|+|v|\|_p^{p/p'}$ 就得到(7). ▮

下面的定理给出了体积有界的区域上的 L^p-空间的一个有用的嵌入结果和这个嵌入的一些推论.

2.8 定理 假定 $\mathrm{vol}\,\Omega=\int_{\Omega}1\,dx<\infty$ 而且 $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$. 如果 $u\in L^q(\Omega)$, 则 $u\in L^p(\Omega)$ 并且

$$\|u\|_p\leqslant(\mathrm{vol}\,\Omega)^{(1/p)-(1/q)}\|u\|_q. \quad (8)$$

因此

$$L^q(\Omega)\to L^p(\Omega). \tag{9}$$

如果 $u\in L^\infty(\Omega)$，则

$$\lim_{p\to\infty}\|u\|_p=\|u\|_\infty. \tag{10}$$

最后，如果对于 $1\leqslant p<\infty$，$u\in L^p(\Omega)$，又如果存在一个常数 K 使得对于一切 p

$$\|u\|_p\leqslant K, \tag{11}$$

则 $u\in L^\infty(\Omega)$ 且

$$\|u\|_\infty\leqslant K \tag{12}$$

证明 当 $p=q$ 时，(8)和(9)是平凡的. 当 $1\leqslant p<q\leqslant\infty$ 且 $u\in L^q(\Omega)$ 时，Hölder 不等式给出

$$\int_\Omega|u(x)|^p dx\leqslant\left\{\int_\Omega|u(x)|^q dx\right\}^{\frac{p}{q}}\left\{\int_\Omega 1dx\right\}^{1-\frac{p}{q}}$$

由此立得(8)和(9). 如果 $u\in L^\infty(\Omega)$，从(8)式我们得到

$$\limsup_{p\to\infty}\|u\|_p\leqslant\|u\|_\infty. \tag{13}$$

另一方面，对于任何 $\varepsilon>0$ 存在一个集合 $A\subset\Omega$，它的测度 $\mu(A)$ 为正，使得

$$|u(x)|\geqslant\|u\|_\infty-\varepsilon, \text{如果 } x\in A.$$

因此

$$\int_\Omega|u(x)|^p dx\geqslant\int_A|u(x)|^p dx\geqslant\mu(A)(\|u\|_\infty-\varepsilon)^p.$$

由此得到 $\|u\|_p\geqslant(\mu(A))^{\frac{1}{p}}(\|u\|_\infty-\varepsilon)$，因此

$$\liminf_{p\to\infty}\|u\|_p\geqslant\|u\|_\infty \tag{14}$$

从(13)和(14)就得到等式(10).

现在假定对于 $1\leqslant p<\infty$ (11) 式成立. 如果 $u\notin L^\infty(\Omega)$ 或者 $u\in L^\infty(\Omega)$ 但 (12) 式不成立，那么能找到常数 $K_1>K$ 和集合

$A\subset\Omega,\mu(A)>0$，使得对于 $x\in A,|u(x)|\geqslant K_1$. 用得到(14)式的同样的论证方法可以证明

$$\liminf_{p\to\infty}\|u\|_p\geqslant K_1,$$

这和(11)式矛盾. ∎

2.9 推论 对于 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 和任何区域 $\Omega, L^p(\Omega)\subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

$L^p(\Omega)$ 的完备性

2.10 定理 如果 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则 $L^p(\Omega)$ 是一个 Banach 空间.

证明 先假定 $1\leqslant p<\infty$, 又设 $\{u_n\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 序列. 存在 $\{u_n\}$ 的一个子序列 $\{u_{n_j}\}$ 使得

$$\|u_{n_{j+1}}-u_{n_j}\|_p\leqslant 1/2^j,\quad j=1,2,\cdots.$$

设 $v_m(x)=\sum_{j=1}^{m}|u_{n_{j+1}}(x)-u_{n_j}(x)|$. 则

$$\|v_m\|_p\leqslant\sum_{j=1}^{m}(1/2^j)<1,\quad m=1,2,\cdots.$$

令 $v(x)=\lim_{m\to\infty}v_m(x)$, 在某些 x 处 $v(x)$ 可以是无穷，由 Fatou 引理 1.44 我们得到

$$\int_\Omega|v(x)|^p dx\leqslant\liminf_{m\to\infty}\int_\Omega|v_m(x)|^p dx\leqslant 1.$$

因此在 Ω 中 $v(x)<\infty$ a.e. 而且级数

$$u_{n_1}(x)+\sum_{j=1}^{\infty}(u_{n_{j+1}}(x)-u_{n_j}(x)) \tag{15}$$

在 Ω 中几乎处处收敛到极限 $u(x)$. 当 $u(x)$ 作为(15)式的极限没有定义时就令 $u(x)=0$. 缩并(15)式, 我们有

$$\lim_{m\to\infty}u_{n_m}(x)=u(x)\quad\text{a.e.}. \text{在}\Omega\text{中}$$

对于任何 $\varepsilon>0$ 存在 N 使得当 $m,n\geqslant N$ 时，$\|u_m-u_n\|_p<\varepsilon$. 因此，再次利用 Fatou 引理, 当 $n\geqslant N$ 时，

$$\int_\Omega |u(x)-u_n(x)|^p dx = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} |u_{n_j}(x)-u_n(x)|^p dx$$

$$\leqslant \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega |u_{n_j}(x)-u_n(x)|^p dx \leqslant \varepsilon^p.$$

于是 $u=(u-u_n)+u_n\in L^p(\Omega)$并且当 $n\to\infty$ 时 $\|u-u_n\|_p\to 0$．所以 $L^p(\Omega)$是完备的.

最后，如果$\{u_n\}$是 $L^\infty(\Omega)$中的 Cauchy 序列，则存在一个零测集 $A\subset\Omega$ 使得如果 $x\notin A$，则对一切 $n, m=1, 2, \cdots$

$$|u_n(x)|\leqslant\|u_n\|_\infty, \quad |u_n(x)-u_m(x)|\leqslant\|u_n-u_m\|_\infty.$$

由于$\{\|u_n\|_\infty\}$在 $\mathbf{R}$ 中有界，u_n 在 $\Omega\sim A$ 上一致收敛到一个有界函数 u. 对于 $x\in A$，令 $u(x)=0$，我们有 $u\in L^\infty(\Omega)$并且当 $n\to\infty$ 时 $\|u_n-u\|_\infty\to 0$. 因此 $L^\infty(\Omega)$是完备的. ▌

2.11 推论 如果 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$L^p(\Omega)$中的 Cauchy 序列有一个在 Ω 上几乎处处点收敛的子序列.

2.12 推论

对于内积

$$(u, v)=\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx,$$

$L^2(\Omega)$是一个 Hilbert 空间. $L^2(\Omega)$的 Hölder 不等式实际上正好是众所周知的 Schwarz 不等式

$$|(u, v)|\leqslant\|u\|_2\|v\|_2.$$

用连续函数来逼近，可分性

2.13 定理 如果 $1\leqslant p<\infty$，则 $C_0(\Omega)$在 $L^p(\Omega)$中稠密.

证明 设 $u\in L^p(\Omega)$，又设 $\varepsilon>0$. 我们证明存在一个函数 $\phi\in C_0(\Omega)$使得$\|u-\phi\|_p<\varepsilon$. 令 $u=u_1-u_2+i(u_3-u_4)$，其中 u_j，$1\leqslant j\leqslant 4$，是非负实值函数. 我们找到 $\phi_j\in C_0(\Omega)$使得$\|\phi_j-u_j\|_p<\varepsilon/4$，$1\leqslant j\leqslant 4$. 那么$\|u-\phi_1+\phi_2-i(\phi_3-\phi_4)\|_p<\varepsilon$. 所以不失一般性，我们假定

u是非负实值函数. 由定理1.39, 存在一个在Ω上点收敛到u的单调增加、非负简单函数的序列$\{s_n\}$. 因为$0\leqslant s_n(x)\leqslant u(x)$, 我们有$s_n\in L^p(\Omega)$. 由于$(u(x)-s_n(x))^p\leqslant(u(x))^p$, 根据控制收敛定理1.45, 在$L^p(\Omega)$中$s_n\to u$. 因此, 我们就可以挑选$s\in\{s_n\}$使得$\|u-s\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$. 由于$s$是简单函数而且$p<\infty$, s的支集一定有有限体积. 我们还可以假定对所有的$x\in\Omega^c$, $s(x)=0$. 应用Lusin定理1.37(f)我们得到一个函数$\phi\in C_0(\Omega)$使得对所有的$x\in\Omega$

$$|\phi(x)|\leqslant\|s\|_\infty$$

并且

$$\operatorname{vol}\{x\in\Omega: s(x)\neq\phi(x)\}<(\varepsilon/4\|s\|_\infty)^p$$

因此由定理2.8我们有

$$\begin{aligned}\|s-\phi\|_p&\leqslant\|s-\phi\|_\infty(\operatorname{vol}\{x\in\Omega: s(x)\neq\phi(x)\})^{1/p}\\&<2\|s\|_\infty(\varepsilon/4\|s\|_\infty)=\varepsilon/2.\end{aligned}$$

由此得到$\|u-\phi\|_p<\varepsilon$. ▮

2.14 事实上, 以上证明说明对于$1\leqslant p<\infty$, $L^p(\Omega)$中简单函数组成的集合在$L^p(\Omega)$中是稠密的. 由定理1.39的直接推论得到, 这一事实在$L^\infty(\Omega)$中也对.

2.15 定理 如果$1\leqslant p<\infty$, 则$L^p(\Omega)$是可分的.

证明 对$m=1,2,\cdots$设

$$\overline{\Omega}_m=\left\{x\in\Omega: \operatorname{dist}(x,\operatorname{bdry}\Omega)\geqslant\frac{1}{m}\text{并且}|x|\leqslant m\right\}$$

因此$\overline{\Omega}_m$是Ω的紧子集. 设P是$\mathbf{R}^n$上系数为有理复数的全体多项式的集合. 设$P_m=\{\chi_{\overline{\Omega}_m}f: f\in P\}$, 其中$\chi_{\overline{\Omega}_m}$是$\overline{\Omega}_m$的特征函数, 由推论1.29 P_m在$C(\overline{\Omega}_m)$中稠密. 而且, $\bigcup_{m=1}^{\infty}P_m$是可数的.

如果$u\in L^p(\Omega)$, $\varepsilon>0$, 则存在$\phi\in C_0(\Omega)$使得$\|u-\phi\|_p<\varepsilon/2$.

如果 $1/m<\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\,\phi,\ \mathrm{bdry}\,\Omega)$，则存在 $f\in P_m$ 使得 $\|\phi-f\|_\infty<(\varepsilon/2)(\mathrm{vol}\,\overline{\Omega}_m)^{-1/p}$ 由此得到

$$\|\phi-f\|_p\leqslant\|\phi-f\|_\infty(\mathrm{vol}\,\overline{\Omega}_m)^{1/p}<\varepsilon/2$$

所以 $\|u-f\|_p<\varepsilon$. 因此可数集合 $\bigcup_{m=1}^{\infty}P_m$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密，从而 $L^p(\Omega)$ 是可分的. ▮

2.16 $C(\Omega)$ 是 $L^\infty(\Omega)$ 的真闭子空间，在 $L^\infty(\Omega)$ 中不稠密. 因此 $C_0(\Omega)$ 和 $C_0^\infty(\Omega)$ 都不在 $L^\infty(\Omega)$ 中稠密，从而 $L^\infty(\Omega)$ 不是可分的.

软化子(Mollifiers)，用光滑函数来逼近

2.17 设 J 是 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中的非负、实值函数并且具有性质

(i) 当 $|x|\geqslant1$ 时，$J(x)=0$

(ii) $\int_{\mathbf{R}^n}J(x)dx=1$.

例如，我们可以取

$$J(x)=\begin{cases}k\exp[-1/(1-|x|^2)] & \text{当 } |x|<1 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } |x|\geqslant1 \text{ 时},\end{cases}$$

其中 $k>0$，选 k 使得满足条件(ii). 如果 $\varepsilon>0$，函数 $J_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}J(x/\varepsilon)$ 是属于 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的非负函数，而且满足

(i) 当 $|x|\geqslant\varepsilon$ 时，$J_\varepsilon(x)=0$,

(ii) $\int_{\mathbf{R}^n}J_\varepsilon(x)dx=1$.

J_ε 叫做软化子，而卷积

$$J_\varepsilon*u(x)=\int_{\mathbf{R}^n}J_\varepsilon(x-y)u(y)dy, \tag{16}$$

对于使(16)式右端有意义的函数 u 有定义，$J_\varepsilon*u(x)$ 叫做 u 的一个光滑化(mollification)或者正则化(regularization). 在下面的引理中我们总括了光滑化的一些性质.

2.18 引理 设 u 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数，u 在区域 Ω 外恒等于零.

(*a*) 如果 $u\in L^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$，则 $J_\varepsilon * u\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

(*b*) 如果还有 $\operatorname{supp} u\subset\subset\Omega$ 那么假如 $\varepsilon<\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, \operatorname{bdry}\Omega)$ 就有 $J_\varepsilon * u\in C_0^\infty(\Omega)$.

(*c*) 如果 $u\in L^p(\Omega)$，其中 $1\leqslant p<\infty$，则 $J_\varepsilon * u\in L^p(\Omega)$. 而且有

$$\|J_\varepsilon * u\|_p\leqslant\|u\|_p \text{ 和 } \lim_{\varepsilon\to 0+}\|J_\varepsilon * u-u\|_p=0.$$

(*d*) 如果 $u\in C(\Omega)$ 且 $G\subset\subset\Omega$，则在 G 上一致地有

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} J_\varepsilon * u(x)=u(x).$$

(*e*) 如果 $u\in C(\overline{\Omega})$，则在 Ω 上一致地有 $\lim_{\varepsilon\to 0+} J_\varepsilon * u(x)=u(x)$.

证明 由于 $J_\varepsilon(x-y)$ 是 x 的一个无穷次可微函数，当 $|y-x|\geqslant\varepsilon$ 时等于 0，又由于对于每个多重指标 α 和一切在 $\mathbf{R}^n$ 的紧集上可积的函数有

$$D^\alpha(J_\varepsilon * u)(x)=\int_{\mathbf{R}^n} D_x^\alpha J_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy,$$

由此得到结论(*a*)和(*b*)是正确的.

假定 $u\in L^p(\Omega)$. 如果 $1<p<\infty$，我们设 $p'=p/(p-1)$，从而由 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}|J_\varepsilon * u(x)|&=\left|\int_{\mathbf{R}^n} J_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy\right|\\&\leqslant\left\{\int_{\mathbf{R}^n} J_\varepsilon(x-y)\,dy\right\}^{1/p'}\left\{\int_{\mathbf{R}^n} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p dy\right\}^{1/p}\\&=\left\{\int_{\mathbf{R}^n} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p dy\right\}^{1/p}. \qquad (17)\end{aligned}$$

因此由 Fubini 定理

$$\int_\Omega |J_\varepsilon * u(x)|^p dx \leqslant \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} J_\varepsilon(x-y)\,|u(y)|^p dy dx$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} |u(y)|^p dy \int_{\mathbf{R}^n} J_\varepsilon(x-y) dx = \|u\|_p^p. \tag{18}$$

设 $\eta>0$. 由定理 2.13 存在 $\phi\in C_0(\Omega)$ 使得 $\|u-\phi\|_p<\eta/3$. 于是由(18)式, $\|J_\varepsilon*u-J_\varepsilon*\phi\|_p<\eta/3$. 现在

$$|J_\varepsilon*\phi(x)-\phi(x)| = \left|\int_{\mathbf{R}^n} J_\varepsilon(x-y)\,(\phi(y)-\phi(x))dy\right|$$
$$\leqslant \sup_{|y-x|<\varepsilon} |\phi(y)-\phi(x)| \tag{19}$$

由于 ϕ 在 Ω 上一致连续, 当 $\varepsilon\to0+$ 时(19) 式的右端趋于零. 由于 $\operatorname{supp}\phi$ 是紧的, 我们可以选择 ε 充分小使得 $\|J_\varepsilon*\phi-\phi\|_p<\eta/3$. 所以对于这样的 ε 我们有 $\|J_\varepsilon*u-u\|_p<\eta$, 这就得到($c$). 如果 $p=1$, 不必用 Hölder 不等式直接从(16)式就得到(18)式, 而(c)的证明的其余部分和上面说的一样. 在(19)式中用 u 来代替 ϕ 就可证明(d)和(e). ▌

2.19 定理 如果 $1\leqslant p<\infty$, 则 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

证明是定理 2.13 和引理 2.18(b, e)的直接推论.

$L^p(\Omega)$ 中的准紧集(precompact sets)

2.20 在研究 L^p-空间时下面的定理所起的作用类似于研究连续函数空间时 Ascoli-Arzela 定理 1.30 所起的作用. 如果 u 是在区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上a.e. 定义的函数. 我们用 $\tilde{u}$ 表示 u 在 Ω 外为零的零延拓, 即

$$\tilde{u}(x)=\begin{cases} u(x) & \text{当 } x\in\Omega \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x\in\mathbf{R}^n\sim\Omega \text{ 时}. \end{cases}$$

2.21 定理 设 $1\leqslant p<\infty$. 有界子集 $K\subset L^p(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中是准紧的当且仅当对于每一个 $\varepsilon>0$ 存在数 $\delta>0$ 和子集合 $G\subset\subset\Omega$

使得对于一切 $u\in K$ 和一切 $h\in\mathbf{R}^n$，$|h|<\delta$ 有

$$\int_{\Omega}|\tilde{u}(x+h)-\tilde{u}(x)|^p dx<\varepsilon^p \tag{20}$$

和

$$\int_{\Omega\sim\overline{G}}|u(x)|^p dx<\varepsilon^p. \tag{21}$$

证明 只要对特殊情形 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 证明本定理就够了，因为把这种特殊情形下的定理应用到集合 $\widetilde{K}=\{\tilde{u}:u\in K\}$ 上去就得到一般 Ω 上的定理.

我们先假定 K 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 中是准紧的. 设给定了 $\varepsilon>0$. 由于 K 有一个有限 $(\varepsilon/6)$-网(定理 1.18)，又由于 $C_0(\mathbf{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 中稠密(定理 2.13)，存在一个具有紧支集的连续函数的有限集合 S，使得对每个 $u\in K$ 存在 $\phi\in S$ 满足 $\|u-\phi\|_p<\varepsilon/3$. 由于 S 是有限的，存在 $r>0$ 使得对一切 $\phi\in S$ 都有 $\operatorname{supp}\phi\subset\overline{B}_r$，其中 B_r 是球 $\{x\in\mathbf{R}^n:|x|<r\}$. 令 $G=B_r$ 我们得到(21). 此外，对所有的 x，$\phi(x+h)-\phi(x)$ 是一致连续的，而且假如 $|h|<1$ 的话，在 B_{r+1} 外恒等于零. 因此，

$$\lim_{|h|\to 0}\int_{\mathbf{R}^n}|\phi(x+h)-\phi(x)|^p dx=0. \tag{22}$$

由于 S 是有限的，(22)式对于 $\phi\in S$ 是一致成立的. 对于 $u\in K$，设 u 平移 h 以后得到 $T_h u$:

$$T_h u(x)=u(x+h). \tag{23}$$

如果 $\phi\in S$ 满足 $\|u-\phi\|_p<\varepsilon/3$，则也有 $\|T_h u-T_h\phi\|_p<\varepsilon/3$. 因此由(22)，对于(与 $u\in K$ 无关的)充分小的 $|h|$，我们有

$$\begin{aligned}\|T_h u-u\|_p&\leqslant\|T_h u-T_h\phi\|_p+\|T_h\phi-\phi\|_p+\|\phi-u\|_p\\&<(2\varepsilon/3)+\|T_h\phi-\phi\|_p<\varepsilon.\end{aligned}$$

从而得到(20). [这种论证表明在 $L^p(\Omega)$ 中平移是连续的.]

为了证明充分性，设给定 $\varepsilon>0$，又选 $G\subset\subset\mathbf{R}^n$ 使得对所有的

$u\in K$

$$\int_{\mathbf{R}^n\sim\overline{G}}|u(x)|^p dx<\varepsilon/3. \tag{24}$$

对于任何 $\eta>0$，由(16)式定义的函数$J_\eta * u$ 属于 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$，特别是属于 $C(\overline{G})$的．如果 $\phi\in C_0(\mathbf{R}^n)$，则由 Hölder 不等式

$$|J_\eta*\phi(x)-\phi(x)|^p=\left|\int_{\mathbf{R}^n}J_\eta(y)(\phi(x-y)-\phi(x))dy\right|^p$$

$$\leqslant\int_{B_\eta}J_\eta(y)|T_{-y}\phi(x)-\phi(x)|^p dy$$

其中 $T_h\phi$ 由(23)式给出．因此

$$\|J_\eta*\phi-\phi\|_p\leqslant\sup_{h\in B_\eta}\|T_h\phi-\phi\|_p. \tag{25}$$

如果 $u\in L^p(\mathbf{R}^n)$，设$\{\phi_n\}$是 $C_0(\mathbf{R}^n)$中的一个序列，在 L^p 的范数下收敛到 u．由引理 2.18(c)，$\{J_\eta*\phi_n\}$是 $L^p(\mathbf{R}^n)$中的一个收敛到 $J_\eta*u$ 的 Cauchy 序列．还因为在 $L^p(\mathbf{R}^n)$中 $T_h\phi_n\to T_hu$，(25)式可以扩充到所有的 $u\in L^p(\mathbf{R}^n)$：

$$\|J_\eta*u-u\|_p\leqslant\sup_{h\in B_\eta}\|T_hu-u\|_p.$$

现在(20)式就蕴涵着对于 $u\in K$ 一致地有$\lim\limits_{|h|\to0}\|T_hu-u\|_p=0$．因此对于 $u\in K$ 一致地有 $\lim\limits_{\eta\to0}\|J_\eta*u-u\|_p=0$．现在固定 $\eta>0$ 使得对所有的 $u\in K$ 有

$$\int_{\overline{G}}|J_\eta*u(x)-u(x)|^p dx\leqslant\frac{\varepsilon}{3\cdot2^p} \tag{26}$$

我们证明 $\{J_\eta*u: u\in K\}$ 在 $\overline{G}$ 上满足 Ascoli-Arzela 定理 1.30 的条件，因此是 $C(\overline{G})$中的准紧集．由(19)式我们有

$$|J_\eta*u(x)|\leqslant(\sup_{x\in\mathbf{R}^n}J_\eta(x))^{1/p}\|u\|_p$$

因为K是 $L^p(\Omega)$中的有界集以及 η 是固定的，所以对于 $x\in\mathbf{R}^n$ 和 $u\in K$，$J_\eta*u$ 是一致有界的．类似地

$$|J_\eta*u(x+h)-J_\eta*u(x)|\leqslant(\sup_{x\in\mathbf{R}^n}J_\eta(x))^{1/p}\|T_hu-u\|_p$$

因此对于 $x\in\mathbf{R}^n$ 和 $u\in K$，一致地有$\lim\limits_{|h|\to 0}J_\eta*u(x+h)=J_\eta*u(x)$.

因此 $\{J_\eta*u:u\in K\}$ 是 $C(\bar{G})$ 中的准紧集，从而由定理 1.18，存在 $C(\bar{G})$ 中函数的有限集 $\{\psi_1,\cdots,\psi_m\}$ 使得如果 $u\in K$，则对于某个 j，$1\leqslant j\leqslant m$，和所有的 $x\in\bar{G}$，有

$$|\psi_j(x)-J_\eta*u(x)|^p<\frac{\varepsilon}{3\cdot 2^p\cdot\mathrm{vol}\bar{G}} \tag{27}$$

用 $\tilde{\psi}_j$ 表示 ψ_j 在 $\bar{G}$ 外为零的零延拓，从(24)，(26)，(27)和不等式 $(|a|+|b|)^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p)$，得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n}|u(x)-\tilde{\psi}_j(x)|^p dx&=\int_{\mathbf{R}^n\sim\bar{G}}|u(x)|^p dx+\int_{\bar{G}}|u(x)-\psi_j(x)|^p dx\\&<\frac{\varepsilon}{3}+2^p\int_{\bar{G}}(|u(x)-J_\eta*u(x)|^p\\&\quad+|J_\eta*u(x)-\psi_j(x)|^p)dx\\&<\frac{\varepsilon}{3}+2^p\left(\frac{\varepsilon}{3\cdot 2^p}+\frac{\varepsilon}{3\cdot 2^p\cdot\mathrm{vol}\bar{G}}\mathrm{vol}\bar{G}\right)=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 K 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 中有一个有限的 ε-网，就是 $\{\tilde{\psi}_j:1\leqslant j\leqslant m\}$，从而根据定理 1.18 是准紧的. ∎

2.22 定理 设 $1\leqslant p<\infty$，又设 $K\subset L^p(\Omega)$. 假设存在一个具有下列性质的 Ω 的子区域序列 $\{\Omega_j\}$：

(a) 对每个 j，$\Omega_j\subset\Omega_{j+1}$；

(b) 对于每个 j，由 K 中的函数在 Ω_j 上的限制构成的集合是 $L^p(\Omega_j)$ 中的准紧集；

(c) 对每个 $\varepsilon>0$，存在 j 使得对一切 $u\in K$ 有

$$\int_{\Omega\sim\Omega_j}|u(x)|^p dx<\varepsilon.$$

则 K 是 $L^p(\Omega)$ 中的准紧集.

证明 设 $\{u_n\}$ 是 K 中的一个序列. 那么根据(b)存在一个子序列 $\{u_n^{(1)}\}$ 使得其限制 $\{u_n^{(1)}|_{\Omega_1}\}$ 在 $L^p(\Omega_1)$ 中收敛. 只要 $\{u_n^{(1)}\}$，…，$\{u_n^{(k)}\}$

一经选定，我们就可以选$\{u_n^{(k)}\}$的一个子序列使得$\{u_n^{(k+1)}|_{\Omega_{k+1}}\}$在$L^p(\Omega_{k+1})$中收敛．因此由(a)，对于$1\leqslant j\leqslant k+1$，$\{u_n^{(k+1)}|_{\Omega_j}\}$也在$L^p(\Omega_j)$中收敛．

设$v_n=u_n^{(n)}$，$n=1,2,\cdots$，显然$\{v_n\}$是$\{u_n\}$的一个子序列．给定$\varepsilon>0$，［由于(c)］存在j使得除去开始的$j-1$项外，对一切$m,n=1,2,\cdots$

$$\int_{\Omega\sim\Omega_j}|v_n(x)-v_m(x)|^p dx<\varepsilon/2 \tag{28}$$

$\{v_n\}$是$\{u_n^{(j)}\}$的子序列，所以$\{v_n|_{\Omega_j}\}$是$L^p(\Omega_j)$中的一个Cauchy序列．于是对充分大的n,m，我们有

$$\int_{\Omega_j}|v_n(x)-v_m(x)|^p dx<\varepsilon/2 \tag{29}$$

把(28)和(29)结合起来，我们看到$\{v_n\}$是$L^p(\Omega)$中的一个Cauchy序列，因此在$L^p(\Omega)$中是收敛的．因此K是$L^p(\Omega)$中的准紧集．▌

我们指出，定理2.22正好是一个众所周知的定理对我们适用的背景，该定理说：紧算子序列的算子-范数极限是紧的．

$L^p(\Omega)$的一致凸性

2.23 对于$1<p<\infty$，空间$L^p(\Omega)$是一致凸的，其范数$\|\cdot\|_p$满足在1.19节中所说的条件．这个结果属于Clarkson [19]，它可以通过$L^p(\Omega)$的一组不等式来得到，这组不等式推广了$L^2(\Omega)$中的平行四边形定律．在定理2.28中将给出这些不等式，为了证明这些不等式我们准备了下面的引理．

2.24 引理 如果$1\leqslant p<\infty$且$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，则

$$(a+b)^p\leqslant 2^{p-1}(a^p+b^p). \tag{30}$$

证明 如果$a=0$，(30)显然成立．如果$a>0$，(30)可以改写为

$$(1+x)^p\leqslant 2^{p-1}(1+x^p), \tag{31}$$

其中 $0\leqslant x=b/a$. 函数 $f(x)=(1+x)^p/(1+x^p)$ 满足 $f(0)=1=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$而且当 $0<x<\infty$时，$f(x)>1$. 因此对于 $x\geqslant 0$, f 在其仅有的一个临界点 $x=1$ 处取到 f 的最大值. 由于 $f(1)=2^{p-1}$,立得(31)式. ▌

2.25 引理 如果 $0<s<1$，函数 $f(x)=(1-s^x)/x$ 是 $x>0$ 的降函数.

证明 $f'(x)=(1/x^2)(g(s^x)-1)$,其中 $g(t)=t-t\ln t$. 因为 $0<s^x<1$,又因为对于 $0<t\leqslant 1$, $g'(t)=-\ln t\geqslant 0$，由此得到 $g(s^x)<g(1)=1$,因此 $f'(x)<0$. ▌

2.26 引理 如果 $1<p\leqslant 2$ 且 $0\leqslant t\leqslant 1$,则

$$\left|\frac{1+t}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{1-t}{2}\right|^{p'}\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t^p\right)^{1/(p-1)},\tag{32}$$

其中 $p'=p/(p-1)$是 p 的共轭指数.

证明 因为如果 $p=2$ 或 $t=0$ 或 $t=1$，(32)中等号显然成立，我们可以假定 $1<p<2$ 和 $0<t<1$. 变换 $t=(1-s)/(1+s)$ 把区间 $0<t<1$ 映到区间 $1>s>0$ 上,它把(32)化为等价的不等式

$$\frac{1}{2}[(1+s)^p+(1-s)^p]-(1+s^{p'})^{p-1}\geqslant 0.\tag{33}$$

如果我们记

$$\binom{p}{0}=1\ 和\binom{p}{k}=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!},\quad k\geqslant 1,$$

(33)式左端的幂级数展开为

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}s^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(-s)^k-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}s^{p'k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{2k}s^{2k}-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}s^{p'k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\binom{p}{2k}s^{2k}-\binom{p-1}{2k-1}s^{p'(2k-1)}-\binom{p-1}{2k}s^{2p'k}\right\}$$

对于 $0\leqslant s\leqslant 1$, 后一级数是收敛的. 我们通过证明对于 $0<s<1$ 级数中的每一项都是正的来证明(33). 第 k 项可以写成:

$$\frac{p(p-1)(2-p)(3-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k)!}s^{2k}$$

$$-\frac{(p-1)(2-p)(3-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k-1)!}s^{p'(2k-1)}$$

$$+\frac{(p-1)(2-p)\cdots(2k-p)}{(2k)!}s^{2kp'}$$

$$=\frac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!}s^{2k}$$

$$\times\left[\frac{p(p-1)}{2k(2k-p)}-\frac{p-1}{2k-p}s^{p'(2k-1)-2k}+\frac{p-1}{2k}s^{2kp'-2k}\right]$$

$$=\frac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!}s^{2k}$$

$$\times\left[\frac{1-s^{(2k-p)/(p-1)}}{(2k-p)/(p-1)}-\frac{1-s^{2k/(p-1)}}{2k/(p-1)}\right]$$

由于 $p<2$, 上式第一个因子是正的; 由于 $0<(2k-p)/(p-1)<2k/(p-1)$, 由引理 2.25, 方括号中的因子是正的. 于是就证明了(33), 因此也证明了(32). ▮

2.27 引理 设 $z, w\in\mathbf{C}$. 如果 $1<p\leqslant 2$, 则

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{z-w}{2}\right|^{p'}\leqslant\left(\frac{1}{2}|z|^p+\frac{1}{2}|w|^p\right)^{1/(p-1)}, \tag{34}$$

其中 $p'=p/(p-1)$. 如果 $2\leqslant p<\infty$, 则

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^{p}+\left|\frac{z-w}{2}\right|^{p}\leqslant\frac{1}{2}|z|^p+\frac{1}{2}|w|^p. \tag{35}$$

证明 因为当 $z=0$ 或 $w=0$ 时(34)显然成立, 而且(34)对于 z 和 w 是对称的, 我们可以假定 $|z|\geqslant|w|>0$. 这时能把(34)重写为

$$\left|\frac{1+re^{i\theta}}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{1-re^{i\theta}}{2}\right|^{p'}\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r^p\right)^{1/(p-1)}, \tag{36}$$

其中 $w/z=re^{i\theta}$, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta<2\pi$. 如果 $\theta=0$, 则在引理 2.26 中早

已证明了(36). 我们证明,对于固定的 r, 函数

$$f(\theta)=|1+re^{i\theta}|^{p'}+|1-re^{i\theta}|^{p'}$$

对于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 在 $\theta=0$ 处有一个最大值, 利用这一结果来完成(36)式的证明. 因为

$$f(\theta)=(1+r^2+2r\cos\theta)^{p'/2}+(1+r^2-2r\cos\theta)^{p'/2}$$

显然有 $f(2\pi-\theta)=f(\pi-\theta)=f(\theta)$, 所以只要在区间 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, 研究 f 就行了. 由于 $p'\geqslant 2$, 在这个区间上, 我们有

$$f'(\theta)=-p'r\sin\theta[(1+r^2+2r\cos\theta)^{(p'/2)-1}$$
$$-(1+r^2-2r\cos\theta)^{(p'/2)-1}]\leqslant 0$$

因此 f 的最大值在 $\theta=0$ 处达到, 这就证明了(36).

如果 $2\leqslant p<\infty$, 则 $1<p'\leqslant 2$, 在(34)中交换 p 和 p' 并利用引理 2.24, 我们有

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^p+\left|\frac{z-w}{2}\right|^p\leqslant\left(\frac{1}{2}|z|^{p'}+\frac{1}{2}|w|^{p'}\right)^{1/(p'-1)}$$
$$=\left(\frac{1}{2}|z|^{p'}+\frac{1}{2}|w|^{p'}\right)^{p/p'}$$
$$\leqslant 2^{(p/p')-1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{p/p'}|z|^p+\left(\frac{1}{2}\right)^{p/p'}|w|^p\right)$$
$$=\frac{1}{2}|z|^p+\frac{1}{2}|w|^p,$$

所以(35)也得到了证明. ▌

2.28 定理 (Clarkson 不等式)设 $u, v\in L^p(\Omega)$. 对于 $1<p<\infty$ 设 $p'=p/(p-1)$. 如果 $2\leqslant p<\infty$, 则

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p\leqslant\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^p, \tag{37}$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^{p'}\geqslant\left(\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^p\right)^{p'-1}. \tag{38}$$

如果 $1<p\leqslant 2$, 则

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^{p'}\leqslant\left(\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^p\right)^{p'-1}, \tag{39}$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p\geqslant\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^p. \tag{40}$$

证明 对于 $2\leqslant p<\infty$，在(35)式中取 $z=u(x)$和 $w=v(x)$并在 Ω 上积分就得到(37)式. 为了对 $1<p\leqslant 2$ 证明(39)式，我们首先注意到对于任何 $u\in L^p(\Omega)$，$\||u|^{p'}\|_{p-1}=\|u\|_p^{p'}$. 利用相应于指数 $p-1<1$ 的逆 Minkowski 不等式和 $z=u(x)$，$w=v(x)$的(34)式，得到

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^{p'}&=\left\|\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1}+\left\|\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1}\\&\leqslant\left(\int_\Omega\left(\left|\frac{u(x)+v(x)}{2}\right|^{p'}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\left|\frac{u(x)-v(x)}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1}dx\right)^{1/(p-1)}\\&\leqslant\left(\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|u(x)|^p+\frac{1}{2}|v(x)|^p\right)dx\right)^{p'-1}\\&=\left(\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^p\right)^{p'-1},\end{aligned}$$

这就是(39)式.

对于 $2\leqslant p<\infty$ 能用与证明(39)同样的方法来证明不等式(38)，不过要用相应于 $p-1\geqslant 1$ 的直接 Minkowski 不等式(5)来代替逆不等式，用不等式

$$\left(\left|\frac{\xi+\eta}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{\xi-\eta}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1}\geqslant\frac{1}{2}|\xi|^p+\frac{1}{2}|\eta|^p,$$

来代替(34). 在(34)式中用 p' 代替 p，$\xi+\eta$ 代替 z，$\xi-\eta$代替 w 就可以得到这个不等式. 最后，能从(35)的一个类似的修正得到(40). 我们要指出，在 $p=2$ 的情形，四个 Clarkson 不等式全都化为平行四边形定律

$$\|u+v\|_2^2+\|u-v\|_2^2=2\|u\|_2^2+2\|v\|_2^2.\ \blacksquare$$

2.29 推论 如果 $1<p<\infty$, 则 $L^p(\Omega)$ 是一致凸的.

证明 设 $u, v\in L^p(\Omega)$ 满足 $\|u\|_p=\|v\|_p=1$ 和 $\|u-v\|_p\geqslant\varepsilon>0$.

如果 $2\leqslant p<\infty$, 从(37)我们有

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p\leqslant 1-\frac{\varepsilon^p}{2^p}.$$

如果 $1<p\leqslant 2$, 从(39)我们有

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^{p'}\leqslant 1-\frac{\varepsilon^{p'}}{2^{p'}}.$$

这两种情形中都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得 $\|(u+v)/2\|_p\leqslant 1-\delta$. ▌

对于 $1<p<\infty$, 由于 $L^p(\Omega)$ 是一致凸的, 根据定理1.20, $L^p(\Omega)$ 是自反的. 在计算了 $L^p(\Omega)$ 的对偶空间之后我们将给出一个关于 $L^p(\Omega)$ 自反性的一个直接证明.

$L^p(\Omega)$ 的赋范对偶

2.30 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 又设 p' 是 p 的共轭指数. 对于每个元素 $v\in L^{p'}(\Omega)$ 我们能够经由

$$L_v(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx,\qquad u\in L^p(\Omega)$$

来定义一个 $L^p(\Omega)$ 上的线性泛函 L_v. 根据 Hölder 不等式

$|L_v(u)|\leqslant\|u\|_p\|v\|_{p'}$ 因此 $L_v\in[L^p(\Omega)]'$ 且

$$\|L_v;[L^p(\Omega)]'\|\leqslant\|v\|_{p'}. \tag{41}$$

我们证明在(41)中等号一定成立. 如果 $1<p\leqslant\infty$, 设当 $v(x)\neq 0$ 时 $u(x)=|v(x)|^{p'-2}\overline{v(x)}$ 而在其它情形 $u(x)=0$. 则 $u\in L^p(\Omega)$, 而且 $L_v(u)=\|u\|_p\|v\|_{p'}$. 现在假定 $p=1$, 则 $p'=\infty$. 如果 $\|v\|_{p'}=0$, 令 $u(x)=0$. 否则令 $0<\varepsilon<\|v\|_\infty$, 又设 A 是 Ω 的这样的可测子集合使得 $0<\mu(A)<\infty$ 且在 A 上 $|v(x)|\geqslant\|v\|_\infty-\varepsilon$. 设对于 $x\in A$, $u(x)=|v(x)|^{-1}\overline{v(x)}$; 其它地方 $u(x)=0$. 那么 $u\in L^1(\Omega)$ 而且 $L_v(u)\geqslant\|u\|_1(\|v\|_\infty-\varepsilon)$. 因此我们已经证明了

$$\|L_v;[L^p(\Omega)]'\|=\|v\|_{p'} \tag{42}$$

所以把 v 映到 L_v 的算子 L 是 $L^{p'}(\Omega)$ 到 $[L^p(\Omega)]'$ 的子空间上的一个等距同构算子.

2.31 自然要问, 同构 L 的值域是否是整个 $[L^p(\Omega)]'$, 即, 是否 $L^p(\Omega)$ 上的每一个连续线性泛函都是对于某个 $v\in L^{p'}(\Omega)$ 的形为 L_v 的泛函, 我们要证在 $1\leqslant p<\infty$ 时确实是这样的. 对于 $p=2$, 这是 Hilbert 空间的 Riesz 表示定理的一个直接推论. 对于一般的 p, 利用 Radon-Nikodym 定理(见Rudin[58] 或定理 8.18) 能给出一个直接的证明. 我们将根据 $L^p(\Omega)$ 的一致凸性和变分论证给出一个更初等的证明. Hewitt 和Stromberg[32]也用过这种证法. 最后, 为了从 $p>1$ 的情形得到 $p=1$ 的情形我们将利用一个极限论证.

2.32 引理 设 $1<p<\infty$. 如果 $L\in[L^p(\Omega)]'$ 且 $\|L;[L^p(\Omega)]'\|=1$, 则存在唯一的 $w\in L^p(\Omega)$ 使得 $\|w\|_p=L(w)=1$. 另一方面, 如果给定了 $w\in L^p(\Omega)$ 和 $\|w\|_p=1$, 则存在唯一的 $L\in[L^p(\Omega)]'$ 使得 $\|L;[L^p(\Omega)]'\|=L(w)=1$.

证明 首先设给定 $L\in[L^p(\Omega)]'$ 且 $\|L\|=1$. 存在一个序列 $\{w_n\}\in L^p(\Omega)$ 使得 $\|w_n\|=1$ 而且 $\lim\limits_{n\to\infty}|L(w_n)|=1$. 我们可以假定对每个 n, $L(w_n)|>\frac{1}{2}$, 而且用一个适当的模为 1 的复数乘上 w_n 来代替 w_n, 使 $L(w_n)>0$. 假如序列 $\{w_n\}$ 不是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列, 那么存在 $\varepsilon>0$ 使得对某些任意大的 m 和 n, $\|w_n-w_m\|_p\geqslant\varepsilon$, 根据一致凸性我们有 $\left\|\frac{1}{2}(w_n+w_m)\right\|_p\leqslant 1-\delta$, 其中 δ 是一个固定的正数. 因此

$$1\geqslant L\left(\frac{w_n+w_m}{\|w_n+w_m\|_p}\right)=\left\|\frac{w_n+w_m}{2}\right\|_p^{-1}L\left(\frac{w_n+w_m}{2}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{1-\delta}\ \frac{1}{2}[L(w_n)+L(w_m)] \tag{43}$$

由于最后的表达式当 $n, m\to\infty$ 时趋于 $1/(1-\delta)$，我们就得到一个矛盾. 因此$\{w_n\}$是 $L^p(\Omega)$ 中的Cauchy 序列，所以收敛到$L^p(\Omega)$中的一个元素 w. 显然 $\|w\|_p=1$ 而且$L(w)=\lim_{n\to\infty}L(w_n)=1$. 把(43)用到两个不同的元素 w 上去就得到 w 的唯一性.

现在假定给了 $w\in L^p(\Omega)$ 和 $\|w\|_p=1$. 如 2.30 节指出的那样，由

$$L_v(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx, \qquad u\in L^p(\Omega), \tag{44}$$

定义的泛函 L_v 满足 $L_v(w)=\|w\|_p^p=1$ 和 $\|L_v;[L^p(\Omega)]'\|=\|v\|_{p'}=\|w\|_p^{p/p'}=1$，其中

$$v(x)=\begin{cases}|w(x)|^{p-2}\overline{w(x)} & \text{当 } w(x)\neq 0 \text{ 时}\\ 0 & \text{其它 } x \text{ 处}\end{cases} \tag{45}$$

所以，余下要证明，如果 $L_1, L_2\in[L^p(\Omega)]'$满足 $\|L_1\|=\|L_2\|=L_1(w)=L_2(w)=1$，则 $L_1=L_2$. 假定不是如此. 那么存在 $u\in L^p(\Omega)$使得 $L_1(u)\neq L_2(u)$. 用 u 的一个适当的倍数代替 u，可以假定 $L_1(u)-L_2(u)=2$. 那么用 u 和 w 的一个适当的倍数之和来代替 u，我们能够使得 $L_1(u)=1$ 和 $L_2(u)=-1$. 如果 $t>0$，则 $L_1(w+tu)=1+t$；由于$\|L_1\|=1$，所以$\|w+tu\|_p\geqslant 1+t$. 类似地，$L_2(w-tu)=1+t$. 所以 $\|w-tu\|_p\geqslant 1+t$. 如果 $1<p\leqslant 2$，Clarkson 不等式(40)给出

$$\begin{aligned}1+t^p\|u\|_p^p&=\left\|\frac{(w+tu)+(w-tu)}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{(w+tu)-(w-tu)}{2}\right\|_p^p\\&\geqslant\frac{1}{2}\|w+tu\|_p^p+\frac{1}{2}\|w-tu\|_p^p\geqslant(1+t)^p.\end{aligned} \tag{46}$$

如果 $2\leqslant p<\infty$，Clarkson 不等式(38)给出

$$1+t^{p'}\|u\|_p^{p'}=\left\|\frac{(w+tu)+(w-tu)}{2}\right\|_p^{p'}$$

$$+\left\|\frac{(w+tu)-(w-tu)}{2}\right\|_p^{p'}\geqslant\left(\frac{1}{2}\left\|w+tu\right\|_p^p\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left\|w-tu\right\|_p^p\right)^{p'-1}\geqslant(1+t)^{p'}. \tag{47}$$

方程(46)和(47)不可能对一切 $t>0$ 都成立，除非 $\|u\|_p=0$，而这是不可能的．因此 $L_1=L_2$. ▌

2.33 定理 ($L^p(\Omega)$ 的 Riesz 表示定理) 设$1<p<\infty$，又设 $L\in[L^p(\Omega)]'$．那么存在 $v\in L^{p'}(\Omega)$使得对于一切 $u\in L^p(\Omega)$

$$L(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

而且，$\|v\|_{p'}=\|L;[L^p(\Omega)]'\|$，因此$[L^p(\Omega)]'\cong L^{p'}(\Omega)$.

证明 如果 $L=0$，我们可以取 $v=0$．因此假定 $L\neq 0$，而且不失一般性假定$\|L;[L^p(\Omega)]'\|=1$．由引理 2.32，存在 $w\in L^p(\Omega)$，$\|w\|_p=1$ 使得 $L(w)=1$．设 v 是由(45)给出的．则由(44)定义的 L_v满足$\|L_v;[L^p(\Omega)]'\|=1$ 和 $L_v(w)=1$．根据引理2.32，再一次有 $L=L_v$．由于 $\|v\|_{p'}=1$，这就完成了证明．▌

2.34 定理 ($L^1(\Omega)$ 的 Riesz 表示定理) 设 $L\in[L^1(\Omega)]'$．那么存在 $v\in L^\infty(\Omega)$使得对一切 $u\in L^1(\Omega)$

$$L(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

而且 $\|v\|_\infty=\|L;[L^1(\Omega)]'\|$．因此$[L^1(\Omega)]'\cong L^\infty(\Omega)$.

证明 我们再次假定 $L\neq 0$ 和$\|L;[L^1(\Omega)]'\|=1$．暂时假定Ω具有有限体积．则由定理 2.8，如果 $1<p<\infty$，有 $L^p(\Omega)\subset L^1(\Omega)$，而且对于任何 $u\in L^p(\Omega)$有

$$|L(u)|\leqslant\|u\|_1\leqslant(\mathrm{vol}\,\Omega)^{1-(1/p)}\|u\|_p.$$

因此 $L\in[L^p(\Omega)]'$，根据定理 2.33，存在 $v_p\in L^{p'}(\Omega)$使得

$$\|v_p\|_{p'}\leqslant(\mathrm{vol}\,\Omega)^{1-(1/p)}, \tag{48}$$

而且对一切 $u\in L^p(\Omega)$

$$L(u)=\int_\Omega u(x)v_p(x)dx \tag{49}$$

由于 $1<p<\infty$ 时 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密，又由于对于任何满足 $1<p,q<\infty$ 的 p, q 和任何 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ 我们有

$$\int_\Omega \phi(x)v_p(x)dx=L(\phi)=\int_\Omega \phi(x)v_q(x)dx,$$

由此得到在 Ω 上 $v_p=v_q$ a.e. 因此对于每个 $p, 1<p<\infty$，在(49)中可以用一个属于 $L^{p'}(\Omega)$ 的函数 v 去代替 v_p，而且按照 (48)，v 满足

$$\|v\|_{p'}\leqslant(\mathrm{vol}\,\Omega)^{1-(1/p)}.$$

再用定理 2.8，得到 $v\in L^\infty(\Omega)$ 和

$$\|v\|_\infty\leqslant\lim_{p'\to\infty}(\mathrm{vol}\,\Omega)^{1-(1/p)}=1. \tag{50}$$

2.30 节一开始的论证证明了(50)中等号一定成立.

如果 Ω 没有有限体积，我们仍然可写 $\Omega=\bigcup_{j=1}^\infty G_j$，其中 $G_j=\{x\in\Omega: j-1\leqslant|x|<j\}$ 有有限体积. 集合 G_j 互不相交. 设 $\chi_j(x)$ 是 G_j 的特征函数. 如果 $u_j\in L^1(G_j)$，令 $\tilde{u}_j$ 表示 u_j 在 G_j 外为零的零延拓，即，当 $x\in G_j$ 时 $\tilde{u}_j(x)=u_j(x)$，否则 $\tilde{u}_j(x)=0$. 设 $L_j(u_j)=L(\tilde{u}_j)$，则 $L_j\in[L^1(G_j)]'$ 且 $\|L_j;[L^1(G_j)]'\|\leqslant1$. 根据上面研究过的有限体积的情形，存在 $v_j\in L^\infty(G_j)$ 使得 $\|v_j\|_{\infty,G_j}\leqslant1$ 而

$$L_j(u_j)=\int_{G_j}u_j(x)v_j(x)dx=\int_\Omega \tilde{u}_j(x)v(x)dx,$$

其中，对于 $x\in G_j\,(j=1,2,\cdots)$ $v(x)=v_j(x)$，因此 $\|v\|_\infty\leqslant1$. 如果 $u\in L^1(\Omega)$，我们令 $u=\sum_{j=1}^\infty\chi_ju$；由控制收敛定理，这个级数在 $L^1(\Omega)$ 中依范数收敛. 由于

$$L\left(\sum_{j=1}^k\chi_ju\right)=\sum_{j=1}^kL_j(\chi_ju)=\int_\Omega\sum_{j=1}^k\chi_j(x)u(x)v(x)dx,$$

根据控制收敛定理取极限，得到

$$L(u)=\int_{\Omega}u(x)v(x)dx.$$

然后，和有限体积的情形一样，立即得到$\|v\|_{\infty}=1$. ∎

2.35 定理 $L^p(\Omega)$是自反的当且仅当$1<p<\infty$.

证明 设$X=L^p(\Omega)$，其中$1<p<\infty$. 由于$X'\cong L^{p'}(\Omega)$，对于任何$w\in X''$，对应着$\tilde{w}\in[L^{p'}(\Omega)]'$使得$w(v)=\tilde{w}(\tilde{v})$，其中

$$v(u)=\int_{\Omega}\tilde{v}(x)u(x)dx,\qquad u\in X.$$

类似地，对应于$\tilde{w}\in[L^{p'}(\Omega)]'$存在$u\in X$使得

$$\tilde{w}(\tilde{v})=\int_{\Omega}\tilde{v}(x)u(x)dx,\qquad \tilde{v}\in L^{p'}(\Omega).$$

由此得到对于一切$v\in X'$

$$w(v)=\tilde{w}(\tilde{v})=\int_{\Omega}\tilde{v}(x)u(x)dx=v(u)=J_Xu(v),$$

J_X是X到X''中的自然等距同构(见1.13节). 这就证明了J_X把X映射到X''上，因此$X=L^p(\Omega)$是自反的.

因为$L^1(\Omega)$是可分的，而$L^1(\Omega)$的对偶等距同构于$L^\infty(\Omega)$，它是不可分的，所以$L^1(\Omega)$和$L^\infty(\Omega)$都不可能是自反的. ∎

2.36 对于空间$L^\infty(\Omega)$，象定理2.33那样的Riesz表示定理不可能成立，因为如果成立的话，定理2.35的论证就表明了$L^1(\Omega)$是自反的. $L^\infty(\Omega)$的对偶大于$L^1(\Omega)$. $[L^\infty(\Omega)]'$可以和Ω上绝对连续、有界全变差的有限可加集合函数构成的空间看成是一样的. 关于细节读者可以参看Yosida[69, p. 118].

第三章　空间$W^{m,p}(\Omega)$

定义和基本性质

本章介绍整数次 Sobolev 空间并建立它们的某些基本性质. 这些空间是定义在任意区域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$上的，而且都是空间 $L^p(\Omega)$ 的向量子空间.

3.1　我们定义一个泛函$\|\cdot\|_{m,p}$如下:

$$\|u\|_{m,p}=\left\{\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|_p^p\right\}^{\frac{1}{p}},\ 如果\ 1\leqslant p<\infty, \tag{1}$$

$$\|u\|_{m,\infty}=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|_\infty, \tag{2}$$

其中m是非负整数，而$1\leqslant p\leqslant\infty$. 对于任何使右端有意义的函数$u$，$\|\cdot\|_p$当然是$L^p(\Omega)$-范数. (在可能碰到区域混淆的情形我们记作$\|u\|_{m,p,\Omega}$来代替$\|u\|_{m,p}$.)显然(1)或(2)在任何使右端取有限值的函数构成的向量空间上定义了一个范数，假如把这个空间中的在Ω中几乎处处相等的函数看作是一样的话. 相应于任何给定的m和p值，我们研究以下三个空间①:

$H^{m,p}(\Omega)\equiv\{u\in C^m(\Omega):\|u\|_{m,p}<\infty\}$ 关于范数 $\|\cdot\|_{m,p}$ 的完备化;

$W^{m,p}(\Omega)\equiv\{u\in L^p(\Omega):D^\alpha u\in L^p(\Omega)$, $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$, 其中 $D^\alpha u$ 是 1.57节中弱的(或广义函数意义的)偏导数$\}$;

$W_0^{m,p}(\Omega)\equiv C_0^\infty(\Omega)$在空间$W^{m,p}(\Omega)$中的闭包.

配上适当的范数(1)或(2)，这些空间就叫做Ω上的 Sobolev 空间. 显然，$W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$，而且如果$1\leqslant p<\infty$，由定理 2.19，有

---

① 下面的“≡”表示右端是左端的定义——译者注.

$W_0^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$. 对于任何 m, 嵌入串

$$W_0^{m,p}(\Omega)\longrightarrow W^{m,p}(\Omega)\longrightarrow L^p(\Omega)$$

也是显然的. 我们将在定理3.16中证明对于任何区域Ω, $H^{m,p}(\Omega)=W^{m,p}(\Omega)$. 1964 年 Meyers 和 Serrin [46] 发表的这个结果澄清了在这之前在文献中存在的关于这些空间之间的关系的许多混乱. 竟有这么长的时间没有发现这个初等结果真令人惊讶.

空间$W^{m,p}$ 是由 Sobolev 在[62, 63]中引进的, 它是和曾为其他作者, 尤其是Morrey[47]和 Deny 与 Lions[21]研究过的许多有关的空间一起引进的. 许多不同的记号($W^{m,p}$, $H^{m,p}$, $P^{m,p}$, L_m^p 等等)曾被(而且正在)用来表示这些空间以及它们的变种, 而且在它们广泛地与 Sobolev 的名字联系在一起之前, 有时还冠以别人的名字来称呼它们, 例如, 象"Beppo Levi 空间"之类的名词.

近来已经作出了基本空间$W^{m,p}(\Omega)$的许多推广, 大部分文献来源于苏联. 我们特别要指出如下推广: 允许m为任何实值 (见第七章)而且把它解释为与分数次导数相应的推广, 还有在 L^p-范数中引进权函数的带权空间, 在各种坐标方向上含有不同阶导数和不同 L^p-范数的空间$W^{m,p}$(各向异性空间). 还有, 按照众所周知的 $L^p(\Omega)$空间的推广 "Orlicz 空间"为模式而得到的, Orlicz-Sobolev 空间(第八章).

在本专著中不可能研究所有可能的推广.

3.2 定理 $W^{m,p}(\Omega)$是 Banach 空间.

证明 设$\{u_n\}$是$W^{m,p}(\Omega)$中的一个 Cauchy 序列. 则对于$0\leqslant|\alpha|\leqslant m$, $\{D^\alpha u_n\}$是 $L^p(\Omega)$中的一个 Cauchy 序列. 因为 $L^p(\Omega)$是完备的, 在 $L^p(\Omega)$中存在函数 u 和 u_α, $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$, 使得当 $n\to\infty$时, 在 $L^p(\Omega)$中 $u_n\to u$ 和 $D^\alpha u_n\to u_\alpha$. 现在 $L^p(\Omega)\subset L^1_{loc}(\Omega)$, 所以按照 1.53 节的结论, u_n 决定一个广义函数 $T_{u_n}\in\mathscr{D}'(\Omega)$. 对任何$\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$由 Hölder 不等式, 有

$$|T_{u_n}(\phi)-T_u(\phi)|\leqslant\int_\Omega|u_n(x)-u(x)|\ \ |\phi(x)|dx$$
$$\leqslant\|\phi\|_{p'}\|u_n-u\|_p,$$
其中 $p'=p/(p-1)$(或当 $p=1$ 时 $p'=\infty$, 或当 $p=\infty$时 $p'=1$). 因此对于一切 $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$当 $n\to\infty$时, $T_{u_n}(\phi)\to T_u(\phi)$. 类似地, 对于一切 $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$, $T_{D^\alpha u_n}(\phi)\to T_{u_\alpha}(\phi)$. 由此得到, 对于一切 $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$
$$T_{u\alpha}(\phi)=\lim_{n\to\infty}T_{D^\alpha u_n}(\phi)=\lim_{n\to\infty}(-1)^{|\alpha|}T_{u_n}(D^\alpha\phi)=(-1)^{|\alpha|}T_u(D^\alpha\phi),$$
因此对于 $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$, 在 Ω 上在广义函数意义下 $u_u=D^\alpha u$, 因此 $u\in W^{m,p}(\Omega)$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{m,p}=0$, 所以 $W^{m,p}(\Omega)$ 是完备的. ▌

当古典偏导数存在而且连续时, 广义函数意义下的偏导数和古典偏导数是一致的; 因此集合
$$S=\{\phi\in C^m(\Omega):\ \|\phi\|_{m,p}<\infty\}$$
显然包含在$W^{m,p}(\Omega)$中. 因为$W^{m,p}(\Omega)$是完备的, S 中的恒等算子延拓成 S 的完备化 $H^{m,p}$和 S 在$W^{m,p}(\Omega)$中的闭包之间的一个等距同构. 因此自然把 $H^{m,p}(\Omega)$ 和这个闭包看成是一样的, 从而得到下面的推论.

3.3 推论 $H^{m,p}(\Omega)\subset W^{m,p}(\Omega)$.

3.4 把$W^{m,p}(\Omega)$ 看作空间 $L^p(\Omega)$ 的笛卡尔积空间的一个闭子空间就非常容易得到空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 的一些重要性质. 设 $N\equiv N(n,m)=\sum\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}1$ 是满足 $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$ 的多重指标的数目. 对于 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 设 $L_N^p=\prod\limits_{j=1}^{N}L^p(\Omega)$. 在 L_N^p 中 $u=(u_1,\cdots,u_N)$的范数由
$$\|u;L_N^p\|=\begin{cases}\left(\sum\limits_{j=1}^{N}\|u_j\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{如果 } 1\leqslant p<\infty\\ \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\|u_j\|_\infty & \text{如果 } p=\infty\end{cases}$$

给出. 由于定理 1.22, 2.10, 2.15, 2.29 和 2.35, L_N^p是一个 Banach 空间, 当 $1\leqslant p<\infty$ 时它是可分的, 当 $1<p<\infty$ 时它是自反的而且是一致凸的。

我们假定满足 $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$ 的 N 个多重指标 α 以某种合适的方式顺次排列起来, 所以对于每一个 $u\in W^{m,p}(\Omega)$可以与一个由

$$Pu=(D^\alpha u)_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \tag{3}$$

给出的、在 L_N^p中有明确定义(well-defined)的向量联系起来. 因为 $\|Pu;L_N^p\|=\|u\|_{m,p}$, 所以 P 是 $W^{m,p}(\Omega)$到子空间 $W\subset L_N^p$上的一个等距同构. 因为$W^{m,p}(\Omega)$是完备的, 所以W是 L_N^p 的闭子空间. 由定理 1.21, 当 $1\leqslant p<\infty$时W是可分的, 当 $1<p<\infty$ 时W是自反的而且是一致凸的. 所以对于$W^{m,p}(\Omega)=P^{-1}(W)$ 同样的结论一定成立.

3.5 定理 $W^{m,p}(\Omega)$当 $1\leqslant p<\infty$ 时是可分的, 当 $1<p<\infty$时是自反的而且是一致凸的. 因此, 特别说来, $W^{m,2}(\Omega)$是一个可分 Hilbert 空间, 其内积为

$$(u,v)_m=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}(D^\alpha u,D^\alpha v)$$

其中 $(u,v)=\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$是 $L^2(\Omega)$ 中的内积.

对偶性, 空间 $W^{-m,p'}(\Omega)$

3.6 在以下几节中, 对于固定的Ω, m和 p, 数 N, 空间 L_N^p和W以及算子 P 都取作 3.4 节所规定的那样. 我们还定义

$$\langle u,v\rangle=\int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

上式对一切使右端有意义的 u, v 有定义. 对于给定的 p, p' 永远表示其共轭指数:

$$p'=\begin{cases}\infty & \text{当} p=1 \text{时}\\ p/(p-1) & \text{当} 1<p<\infty \text{时}\\ 1 & \text{当} p=\infty \text{时}.\end{cases}$$

3.7 引理 设 $1\leqslant p<\infty$. 对于每个 $L\in(L_N^p)'$ 有唯一的 $v\in L_N^{p'}$ 与之对应使得对于一切 $u\in L_N^p$

$$L(u)=\sum_{j=1}^{N}\langle u_j, v_j\rangle$$

而且

$$\|L;(L_N^p)'\|=\|v;L_N^{p'}\| \tag{4}$$

于是 $(L_N^p)'\cong L_N^{p'}$.

证明 若 $1\leqslant j\leqslant N$ 且 $w\in L^p(\Omega)$, 设 $w_{(j)}=(0,\cdots,0,w,0,\cdots,0)$ 是 L_N^p 的元素，它的第 j 个分量是 w, 其余分量都是 0. 令 $L_j(w)=L(w_{(j)})$, 我们知道 $L_j\in(L^p(\Omega))'$, 因此由定理 2.33 和 2.34 存在(唯一的) $v_j\in L^{p'}(\Omega)$ 使得对一切 $w\in L^p(\Omega)$

$$L(w_{(j)})=L_j(w)=\langle w, v_j\rangle.$$

如果 $u\in L_N^p$, 则

$$L(u)=L\left(\sum_{j=1}^{N}u_{j(j)}\right)=\sum_{j=1}^{N}L(u_{j(j)})=\sum_{j=1}^{N}\langle u_j, v_j\rangle.$$

由(对于函数及有限和的) Hölder 不等式, 我们有

$$|L(u)|\leqslant\sum_{j=1}^{N}\|u_j\|_p\|v_j\|_{p'}\leqslant\|u;L_N^p\|\,\|v;L_N^{p'}\|$$

所以 $\|L;(L_N^p)'\|\leqslant\|v;L_N^{p'}\|$. 事实上这两个范数是相等的，我们证明如下：当 $1<p<\infty$ 且 $1\leqslant j\leqslant N$ 时, 设

$$u_j(x)=\begin{cases}|v_j(x)|^{p'-2}\overline{v_j(x)} & \text{当 } v_j(x)\neq 0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } v_j(x)=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

容易验证 $|L(u_1,\cdots,u_N)|=\|v;L_N^{p'}\|^{p'}=\|u;L_N^p\|\,\|v;L_N^{p'}\|$.

当 $p=1$ 时，我们选 k 使得 $\|v_k\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\|v_j\|_\infty$, 对任何 $\varepsilon>0$, 存

在一个体积有限且非 0 的可测集 $A\subset\Omega$，使得对于 $x\in A$ 有 $|v_k(x)|\geqslant\|v_k\|_\infty-\varepsilon$. 令

$$u(x)=\begin{cases}\overline{v_k(x)}/|v_k(x)| & \text{当}x\in A\text{ 且 }v_k(x)\neq0\text{ 时}\\ 0 & \text{当 }x\text{ 是}\Omega\text{的其它点时.}\end{cases}$$

则

$$L(u_{(k)})=\langle u,v_k\rangle=\int_A|v_k(x)|dx\geqslant(\|v_k\|_\infty-\varepsilon)\|u\|_1$$
$$=(\|v;L_N^\infty\|-\varepsilon)\|u_{(k)};L_N^1\|$$

因为 ε 是任意的，因此在这种情形下也一定推得(4). ▌

3.8 定理 设 $1\leqslant p<\infty$. 对于每个 $L\in(W^{m,p}(\Omega))'$ 存在一个元素 $v\in L_N^{p'}$ 使得把向量 v 写成 $(v_\alpha)_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}$ 的形式时，对一切 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，有

$$L(u)=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\langle D^\alpha u,v_\alpha\rangle. \tag{5}$$

而且

$$\|L;(W^{m,p}(\Omega))'\|=\inf\|v;L_N^{p'}\|=\min\|v;L_N^{p'}\|, \tag{6}$$

下确界是在对于一切 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 使(5)式成立的所有的 $v\in L_N^{p'}$ 构成的集合上取的，而且一定在这个集合上取到.

证明 线性泛函 L^* 定义如下;

$$L^*(Pu)=L(u),\qquad u\in W^{m,p}(\Omega)$$

它是定义在由(3)定义的算子 P 的值域上的. 因为 P 是一个等距同构，$L^*\in W'$ 而且

$$\|L^*;W'\|=\|L;(W^{m,p}(\Omega))'\|.$$

由 Hahn-Banach 定理，存在一个 L^* 到 L_N^p 全体的保范延拓 $\widetilde{L}$，从而由引理 3.7，存在 $v\in L_N^{p'}$ 使得如果 $u=(u_\alpha)_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\in L_N^p$，则

$$\widetilde{L}(u)=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\langle u_\alpha,v_\alpha\rangle.$$

因此对于 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 我们得到

$$L(u)=L^*(Pu)=\widetilde{L}(Pu)=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\langle D^\alpha u, v_\alpha\rangle$$

而且

$$\|L;(W^{m,p}(\Omega))'\|=\|L^*;W'\|=\|\widetilde{L};(L^p_N)'\|=\|v;L^{p'}_N\|. \qquad (7)$$

现在对一切 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 使(5)式成立的任何元素 $v\in L^{p'}_N$ 与 L^* 的一个延拓 L 相对应，所以范数 $\|v;L^{p'}_N\|$ 不小于 $\|L;(W^{m,p}(\Omega))'\|$. 把这一点和(7)式结合起来，就得到(6)式. ▌

我们指出，至少，当 $1<p<\infty$ 时，满足(5)和(6)的元素 $v\in L^{p'}_N$ 是唯一的. 因为 L^p_N 和 $L^{p'}_N$ 是一致凸的，通过和引理 2.32 类似的论证得到定义在 L^p_N 的闭子空间上的线性泛函有唯一的到 L^p_N 的保范延拓.

3.9 对于 $1\leqslant p<\infty$，空间 $(W^{m,p}(\Omega))'$ 的每一个元素 L 是一个广义函数 $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的延拓. 为了证明这一点，假定 L 是对某个 $v\in L^{p'}_N$ 由(5)式给出的，而且由下式定义 $T_{v_\alpha}, T\in\mathscr{D}'(\Omega)$,

$$T_{v_\alpha}(\phi)=\langle\phi, v_\alpha\rangle, \qquad \phi\in\mathscr{D}(\Omega), 0\leqslant|\alpha|\leqslant m,$$

$$T=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha T_{v_\alpha} \qquad (8)$$

对于一切 $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)\subset W^{m,p}(\Omega)$ 有

$$T(\phi)=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}T_{v_\alpha}(D^\alpha\phi)=L(\phi)$$

所以 L 显然是 T 的一个延拓. 而且，按照(6)我们有

$$\|L;(W^{m,p}(\Omega))'\|=\min\{\|v;L^{p'}_N\|: L \text{ 延拓了由(8)给出的} T\}.$$

对于 $L\in(W^{m,p}_0(\Omega))'$，上面的注解也适用，因为任何这样的泛函有一个到 $W^{m,p}(\Omega)$ 的保范延拓.

现在假定 T 是 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中对某个 $v\in L^{p'}_N$, $1\leqslant p'<\infty$ 的形为(8)的元素. 那么 T 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的连续延拓可能不是唯一的. 但是我们证明 T 在 $W^{m,p}_0(\Omega)$ 上的连续延拓是唯一的. 当 $u\in W^{m,p}_0(\Omega)$ 时，设 $\{\phi_n\}$ 是 $C^\infty_0(\Omega)=\mathscr{D}(\Omega)$ 中的一个序列，使得当 $n\to\infty$ 时，

$\|\phi_n-u\|_{m,p}\to 0$，则当 $k,n\to\infty$ 时

$$|T(\phi_k)-T(\phi_n)|\leqslant\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}|T_{v_\alpha}(D^\alpha\phi_k-D^\alpha\phi_n)|$$

$$\leqslant\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha(\phi_k-\phi_n)\|_p\|v_\alpha\|_{p'}$$

$$\leqslant\|\phi_k-\phi_n\|_{m,p}\|v;L_N^{p'}\|\to 0.$$

所以$\{T(\phi_n)\}$是 C 中的一个 Cauchy 序列，因而收敛到一个极限，我们把它记作 $L(u)$，因为以下事实是显然的，即如果另有$\{\psi_n\}\subset\mathscr{D}(\Omega)$而且$\|\psi_n-u\|_{m,p}\to 0$，则当 $n\to\infty$时 $T(\phi_n)-T(\psi_n)\to 0$. 这样定义的泛函L是线性的而且属于$(W_0^{m,p}(\Omega))'$，因为如果象前面所说的 $u=\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n$，则

$$|L(u)|=\lim_{n\to\infty}|T(\phi_n)|\leqslant\lim_{n\to\infty}\|\phi_n\|_{m,p}\|v;L_N^{p'}\|=\|u\|_{m,p}\|v;L_N^{p'}\|.$$

所以我们已经证明了下面的定理.

3.10 定理 设$1\leqslant p<\infty$. 对偶空间$(W_0^{m,p}(\Omega))'$等距同构于由对于某些 $v\in L_N^{p'}$满足(8)式的广义函数 $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 组成的 Banach 空间，该空间由

$$\|T\|=\inf\{\|v;L_N^{p'}\|:\ v\text{ 满足}(8)\}$$

来赋范. 一般说来，如果 $W_0^{m,p}(\Omega)$是$W^{m,p}(\Omega)$的真子空间，不能期望$(W^{m,p}(\Omega))'$会有如此简单的表征.

3.11 如果 $m=1,2,\cdots$以及 $1\leqslant p<\infty$，设 p' 表示 p 的共轭指数，用$W^{-m,p'}(\Omega)$ 来表示上述定理中所说的Ω上的广义函数所构成的 Banach 空间. (空间$W^{-m,p'}(\Omega)$的完备性是上述定理所断言的等距同构的一个推论.)当 $1<p<\infty$ 时，$W^{-m,p'}(\Omega)$ 显然是可分的，而且是自反的.

3.12 设 $1<p<\infty$，每个元素 $v\in L^{p'}(\Omega)$ 通过 $L_v(u)=\langle u,v\rangle$ 决定$(W_0^{m,p}(\Omega))'$中的一个元素 L_v，因为

$$|L_v(u)|=|\langle u,v\rangle|\leqslant\|v\|_{p'}\|u\|_p\leqslant\|v\|_{p'}\|u\|_{m,p}.$$

我们把 L_v 的范数定义为 $v\in L^{p'}(\Omega)$的$(-m,p')$-范数，即

$$\|v\|_{-m,p'}=\|L_v;(W_0^{m,p}(\Omega))'\|=\sup_{\substack{u\in W\\ \|u\|_{m,p}\leqslant 1}}|\langle u,v\rangle|,$$

在等式的右端我们已经用W来表示$W_0^{m,p}(\Omega)$，为了书写简单起见，我们继续这样做．显然，对任何$u\in W$和$v\in L^{p'}(\Omega)$，我们有

$$\|v\|_{-m,p'}\leqslant\|v\|_{p'},$$

$$|\langle u,v\rangle|=\|u\|_{m,p}\left|\left\langle\frac{u}{\|u\|_{m,p}},v\right\rangle\right|\leqslant\|u\|_{m,p}\|v\|_{-m,p'}. \tag{9}$$

上式是 Hölder 不等式的一个推广．

设$V=\{L_v:\ v\in L^{p'}(\Omega)\}$．因此 V 是 $W'=(W_0^{m,p}(\Omega))'$的向量子空间．我们证明事实上V在W'中稠密．易见这等价于证明：如果$F\in W''$对一切$L_v\in V$满足$F(L_v)=0$，则在W''中$F=0$．因为W是自反的，存在$f\in W$相应于$F\in W''$使得对一切$v\in L^{p'}(\Omega)$，$\langle f,v\rangle=L_v(f)=F(L_v)=0$．因为$f\in L^p(\Omega)$．由此得到在$\Omega$中$f(x)=0$ a.e.．因此在W中$f=0$从而在W''中$F=0$．

设$H^{-m,p'}(\Omega)$表示$L^{p'}(\Omega)$关于范数$\|\cdot\|_{-m,p'}$的完备化．那么我们有

$$H^{-m,p'}(\Omega)\cong(W_0^{m,p}(\Omega))'\cong W^{-m,p'}(\Omega).$$

特别，与每个$v\in H^{-m,p'}(\Omega)$相应，存在$T_v\in W^{-m,p'}(\Omega)$使得对一切$\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$和一切使$\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n-v\|_{-m,p'}=0$的序列$\{v_n\}\subset L^{p'}(\Omega)$有$T_v(\phi)=\lim\limits_{n\to\infty}\langle\phi,v_n\rangle$．反之，任何$T\in W^{-m,p'}(\Omega)$存在某个$v\in H^{-m,p'}(\Omega)$使得$T=T_v$．而且，由(9)式，$|T_v(\phi)|\leqslant\|\phi\|_{m,p}\|v\|_{-m,p'}$．

3.13 对于$1<p<\infty$的情形，通过类似于3.12节中的论证，对偶空间$(W^{m,p}(\Omega))'$可以表征为$L^{p'}(\Omega)$关于范数

$$\|v\|^{\sim}_{-m,p'}=\sup_{\substack{u\in W^{m,p}(\Omega)\\ \|u\|_{m,p}\leqslant 1}}|\langle u,v\rangle|$$

的完备化．

用Ω上的光滑函数来逼近

我们希望证明$\{\phi\in C^\infty(\Omega):\ \|\phi\|_{m,p}<\infty\}$在$W^{m,p}(\Omega)$中稠密. 为此我们需要下面关于无穷次可微单位分解的标准存在定理.

3.14 定理 设A是$\mathbf{R}^n$中任意一个子集，又设$\mathcal{O}$是$\mathbf{R}^n$中覆盖住A的一组开集，即，使得$A\subset\bigcup_{U\in\mathcal{O}}U$. 那么存在一个由具有下列性质的函数$\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$构成的函数族$\Psi$:

(i) 对一切$\psi\in\Psi$和一切$x\in\mathbf{R}^n$, $0\leqslant\psi(x)\leqslant1$.

(ii) 如果$K\subset\subset A$, 除可能有有限个ψ外所有的$\psi\in\Psi$在K上恒等于0.

(iii) 对每一个$\psi\in\Psi$存在$U\in\mathcal{O}$使得$\operatorname{supp}\psi\subset U$.

(iv) 对一切$x\in A$, $\sum_{\psi\in\Psi}\psi(x)=1$.

这样的一个函数族Ψ叫做A的从属于$\mathcal{O}$的一个C^∞-单位分解.

证明 因为在许多教科书中可以找到证明，我们在这里只给出一个轮廓，把细节留给读者. 首先假定A是紧的，所以$A\subset\bigcup_{j=1}^N U_j$，其中$U_1,\cdots,U_N\in\mathcal{O}$. 能够构造紧集$K_1\subset U_1,\cdots,K_N\subset U_N$使$A\subset\bigcup_{j=1}^N K_j$. 对$1\leqslant j\leqslant N$存在非负值函数$\phi_j\in C_0^\infty(U_j)$使得对$x\in K_j$, $\phi_j(x)>0$. 那么能够构造一个在$\mathbf{R}^n$上无穷次可微的正函数ϕ，而且对于$x\in A$满足$\phi(x)=\sum_{j=1}^N\phi_j(x)$. 于是$\Psi=\{\psi_j:\ \psi_j(x)=\phi_j(x)/\phi(x), 1\leqslant j\leqslant N\}$就具有所要的性质. 现在假定$A$是开集，则$A=\bigcup_{j=1}^\infty A_j$，其中

$$A_j=\left\{x\in A:\ |x|\leqslant j\quad 而且\quad \operatorname{dist}(x,\operatorname{bdry}A)\geqslant\frac{1}{j}\right\}$$

是紧的. 对每个j，集族

$$\mathscr{O}_j=\{U\cap(A_{j+1}\text{ 的内点}\cap A_{j-2}^c):\ U\in\mathscr{O}\}$$

盖住 A_j，所以存在一个 A_j 的从属于 $\mathscr{O}_j$ 的有限 C^∞-单位分解 Ψ_j。在每一点，和式 $\sigma(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\phi\in\Psi_j}\phi(x)$ 只包含有限多个非 0 项，而且在每个 $x\in A$ 上是正的。函数族 $\Psi=\{\psi$: 当 $x\in A$ 时对于在某个 Ψ_j 中的某个 ϕ, $\psi(x)=\phi(x)/\sigma(x)$, 当 $x\notin A$ 时, $\psi(x)=0\}$ 具有所规定的性质. 最后，如果 A 是任意的，则 $A\subset B=\bigcup_{U\in\mathscr{O}}U$，其中 B 是开集. 对 B 做出的任何单位分解同样也是 A 的单位分解. ▌

3.15 引理 设 J_ε 是 2.17 节中定义的软化子，又设 $1\leqslant p<\infty$ 而且 $u\in W^{m,p}(\Omega)$. 如 $\Omega'\subset\subset\Omega$，则在 $W^{m,p}(\Omega')$ 中 $\lim_{\varepsilon\to 0+}J_\varepsilon*u=u$.

证明 设 $\varepsilon<\operatorname{dist}(\Omega',\operatorname{bdry}\Omega)$，对任何 $\phi\in\mathscr{D}(\Omega')$ 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'}J_\varepsilon*u(x)D^\alpha\phi(x)dx&=\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{u}(x-y)J_\varepsilon(y)D^\alpha\phi(x)dxdy\\&=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}D_x^\alpha\tilde{u}(x-y)J_\varepsilon(y)\phi(x)dxdy\\&=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega'}J_\varepsilon*D^\alpha u(x)\phi(x)dx,\end{aligned}$$

其中 $\tilde{u}$ 是在 Ω 外为 0 的 u 的零延拓. 因此在 Ω' 中在广义函数意义下 $D^\alpha J_\varepsilon*u=J_\varepsilon*D^\alpha u$. 因为对 $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$, $D^\alpha u\in L^p(\Omega)$, 由引理2.18(c)我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\|D^\alpha J_\varepsilon*u-D^\alpha u\|_{p,\Omega'}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\|J_\varepsilon*D^\alpha u-D^\alpha u\|_{p,\Omega'}=0.$$

于是

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\|J_\varepsilon*u-u\|_{m,p,\Omega'}=0.\ ▌$$

3.16 定理 (Meyers 和 Serrin[46]) 如果 $1\leqslant p<\infty$，则

$$H^{m,p}(\Omega)=W^{m,p}(\Omega).$$

证明 由于推论 3.3 只要证明 $W^{m,p}(\Omega)\subset H^{m,p}(\Omega)$ 就够了，即证明 $\{\phi\in C^m(\Omega):\ \|\phi\|_{m,p}<\infty\}$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中是稠密的. 如果

$u \in W^{m,p}(\Omega)$，而 $\varepsilon>0$，实际上我们证明存在 $\phi \in C^\infty(\Omega)$ 使得 $\|u-\phi\|_{m,p}<\varepsilon$. 对 $k=1,2,\cdots$，设

$$\Omega_k=\left\{x\in\Omega:\ |x|<k \text{ 且 } \operatorname{dist}(x,\ \operatorname{bdry}\Omega)>\frac{1}{k}\right\},$$

又设 $\Omega_0=\Omega_{-1}=\varnothing$ 是空集. 则

$$\mathscr{O}=\{U_k:U_k=\Omega_{k+1}\cap(\overline{\Omega_{k-1}})^c,\ k=1,2,\cdots\}$$

是一个盖住 Ω 的开子集族，设 Ψ 是 Ω 的从属于 $\mathscr{O}$ 的一个 C^∞ 单位分解. 设 ψ_k 表示支集包含在 U_k 中的有限个函数 $\psi\in\Psi$ 的和. 则在 Ω 上 $\psi_k\in C_0^\infty(U_k)$ 而且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi_k(x)=1$.

如 $0<\varepsilon<1/(k+1)(k+2)$，则 $J_\varepsilon*(\psi_k u)$ 在 $\Omega_{k+2}\cap(\Omega_{k-2})^c=\mathscr{V}_k\subset\subset\Omega$ 中有支集，因为 $\psi_k u\in W^{m,p}(\Omega)$ 我们可以选 ε_k，$0<\varepsilon_k<1/(k+1)(k+2)$ 使得

$$\|J_{\varepsilon_k}*(\psi_k u)-\psi_k u\|_{m,p,\Omega}=\|J_{\varepsilon_k}*(\psi_k u)-\psi_k u\|_{m,p,\mathscr{V}_k}<\varepsilon/2^k.$$

设 $\phi=\sum\limits_{k=1}^{\infty}J_{\varepsilon_k}*(\psi_k u)$. 在任何 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 上，在和式中只可能有有限项不为 0. 因此 $\phi\in C^\infty(\Omega)$，对于 $x\in\Omega_k$ 我们有

$$u(x)=\sum_{j=1}^{k+2}\psi_j(x)u(x),\qquad \phi(x)=\sum_{j=1}^{k+2}J_{\varepsilon_j}*(\psi_j u)(x).$$

因此

$$\|u-\phi\|_{m,p,\Omega_k}\leqslant\sum_{j=1}^{k+2}\|J_{\varepsilon_j}*(\psi_j u)-\psi_j u\|_{m,p,\Omega}<\varepsilon.$$

由单调收敛定理 1.43，$\|u-\phi\|_{m,p,\Omega}<\varepsilon$. ∎

我们指出定理不能推广到 $p=\infty$ 的情形，例如，若 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}: -1<x<1\}$ 而 $u(x)=|x|$，则 $u\in W^{1,\infty}(\Omega)$，但是 $u\notin H^{1,\infty}(\Omega)$. 事实上，如果 $\varepsilon<\frac{1}{2}$，任何函数 $\phi\in C^1(\Omega)$ 都不能使 $\|\phi'-u'\|_\infty<\varepsilon$.

用 $\mathbf{R}^n$ 上的光滑函数来逼近

3.17 刚才证明了 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的元素总能用Ω上的光滑函数来逼近，现在我们要问是否在实际上能够用具有一切阶或具有直到m阶有界导数的有界函数来逼近. 也就是，我们问是否对于任何$k\geqslant m$，$C^k(\overline{\Omega})$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密. 下面的例子表明这个问题的回答可以是否定的:

设 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ 0<|x|<1,\ 0<y<1\}$，则由

$$u(x,y)=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } x<0 \text{ 时}\end{cases}$$

规定的函数显然属于 $W^{1,p}(\Omega)$. 但是读者可以验证，对于充分小的 $\varepsilon>0$，没有函数 $\phi\in C^1(\overline{\Omega})$ 能够满足$\|u-\phi\|_{1,p}<\varepsilon$. 由于这种区域造成的困难就在于区域位于部分边界 (线段 $x=0,0<y<1$) 的两边.

我们说区域Ω具有**线段性质**，如果对于每个$x\in\mathrm{bdry}\,\Omega$，存在一个开集$U_x$和一个非0向量$y_x$，使得$x\in U_x$，又如果$z\in\overline{\Omega}\cap U_x$，则对于$0<t<1$，$z+ty_x\in\Omega$. 具有这种性质的区域一定有$(n-1)$维边界，而且不能同时位于其边界的任何给定部分的两边.

下面的定理说明，线段性质足以保证$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$在$W^{m,p}(\Omega)$中稠密，因而特别说来，也保证对于任何m，$C^k(\overline{\Omega})$在$W^{m,p}$中稠密.

3.18 定理 如果Ω具有线段性质，那么对$1\leqslant p<\infty$，$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$中的函数在Ω上的限制构成的集合在$W^{m,p}(\Omega)$中稠密.

证明 设f是满足

(i) 当 $|x|\leqslant 1$ 时 $f(x)=1$,

(ii) 当 $|x|\geqslant 2$ 时 $f(x)=0$,

(iii) 对于一切 x 和 $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$，$|D^\alpha f(x)|\leqslant M$ (常数) 的

$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中一个固定的函数. 对 $\varepsilon>0$，令 $f_\varepsilon(x)=f(\varepsilon x)$. 那么当

$|x|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$ 时 $f_\varepsilon(x)=1$ 而当 $\varepsilon\leqslant 1$ 时 $|D^\alpha f_\varepsilon(x)|\leqslant M\varepsilon^{|\alpha|}\leqslant M$. 如果 $u\in W^{m,p}(\Omega)$, 则 $u_\varepsilon=f_\varepsilon\cdot u$ 属于 $W^{m,p}(\Omega)$ 且具有有界支集. 因为对于 $0<\varepsilon\leqslant 1$ 和 $|\alpha|\leqslant m$

$$|D^\alpha u_\varepsilon(x)|=\left|\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta u(x)D^{\alpha-\beta}f_\varepsilon(x)\right|\leqslant M\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|D^\beta u(x)|,$$

令 $\Omega_\varepsilon=\left\{x\in\Omega:|x|>\frac{1}{\varepsilon}\right\}$, 我们有

$$\begin{aligned}\|u-u_\varepsilon\|_{m,p,\Omega}&=\|u-u_\varepsilon\|_{m,p,\Omega_\varepsilon}\leqslant\|u\|_{m,p,\Omega_\varepsilon}+\|u_\varepsilon\|_{m,p,\Omega_\varepsilon}\\&\leqslant\text{const}\|u\|_{m,p,\Omega_\varepsilon}.\end{aligned}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时, 右端趋于 0. 因此任何 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 能够用 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的具有有界支集的函数来逼近.

所以现在我们可以假定 $K=\{x\in\Omega:u(x)\neq 0\}$ 是有界的. 于是集合 $F=\bar{K}\sim(\bigcup_{x\in\text{bdry}\,\Omega}U_x)$ 是紧的而且包含在 Ω 中, $\{U_x\}$ 是在线段性质定义中指出的开集合的集族. 存在一个开集 U_0 使得 $F\subset\subset U_0\subset\subset\Omega$. 因为 $\bar{K}$ 是紧的, 存在有限个集合 U_x; 我们把它们重新命名为 $U_1,U_2\cdots,U_k$, 使得 $\bar{K}\subset U_0\cup U_1\cup\cdots\cup U_k$. 而且, 我们可以找到另外一些开集 $\widetilde{U}_0,\widetilde{U}_1,\cdots,\widetilde{U}_k$ 使得 $\widetilde{U}_j\subset\subset U_j$, $0\leqslant j\leqslant k$, 仍有 $\bar{K}\subset\widetilde{U}_0\cup\widetilde{U}_1\cup\cdots\cup\widetilde{U}_k$.

设 Ψ 是从属于 $\{\widetilde{U}_j;0\leqslant j\leqslant k\}$ 的一个 C^∞ 单位分解, 又设 ψ_j 是支集在 $\widetilde{U}_j$ 中的有限个函数 $\psi\in\Psi$ 的和. 令 $u_j=\psi_j u$. 假设对每个 j 我们能够找到 $\phi_j\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 使得

$$\|u_j-\phi_j\|_{m,p,\Omega}<\frac{\varepsilon}{k+1}. \tag{10}$$

那么令 $\phi=\sum_{j=0}^{k}\phi_j$, 我们得到

$$\|\phi-u\|_{m,p,\Omega}\leqslant\sum_{j=0}^{k}\|\phi_j-u_j\|_{m,p,\Omega}<\varepsilon.$$

由引理3.15, 对于 $j=0$ 能找到满足(10)的一个函数 $\phi_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,

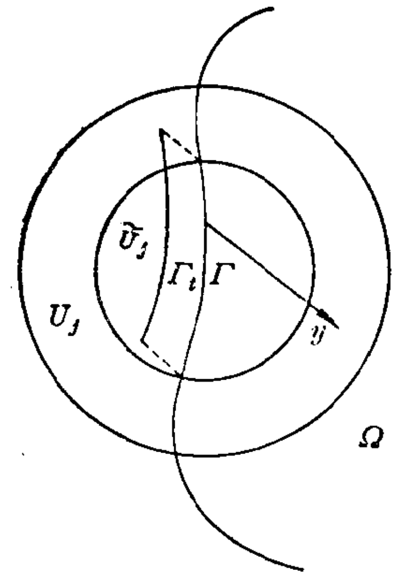


图 1

因为 $\text{supp}\, u_0 \subset \widetilde{U}_0 \subset\subset \Omega$. 因此，剩下来要对 $1 \leqslant j \leqslant k$ 找满足(10)的 ϕ_j. 对于固定的 j，我们把 u_j 延拓成为 Ω 外恒等于 0. 于是 $u_j \in W^{m,p}(\mathbf{R}^n \sim \Gamma)$，其中 $\Gamma = \widetilde{U}_j \cap \text{bdry}\Omega$. 设 y 是线段性质定义中与集合 U_j 相应的非 0 向量(图 1)，设 $\Gamma_t = \Gamma - ty$，其中选 t 使得 $0 < t < \min(1, \text{dist}(\widetilde{U}_j, R^n \sim U_j)/|y|)$. 则由于线段性质 $\Gamma_t \subset U_j$ 且 $\Gamma_t \cap \overline{\Omega}$ 是空集. 设 $u_{j,t}(x) = u_j(x + ty)$，则 $u_{j,t} \in W^{m,p}(\mathbf{R}^n \sim \Gamma_t)$. 在 $L^p(\Omega)$ 中平移是连续的，所以对于 $|\alpha| \leqslant m$，当 $t \to 0+$ 时，在 $L^p(\Omega)$ 中 $D^\alpha u_{j,t} \to D^\alpha u_j$，因此当 $t \to 0+$ 时，在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中 $u_{j,t} \to u_j$，所以只要找 $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 使得 $\|u_{j,t} - \phi_j\|_{m,p}$ 充分小就行了. 但是 $\Omega \cap U_j \subset\subset \mathbf{R}^n \sim \Gamma_t$，所以由引理 3.15 对适当小的 $\delta > 0$ 我们可以取 $\phi_j = J_\delta * u_{j,t}$. 这就完成了证明. ▌

3.19 推论 $W_0^{m,p}(\mathbf{R}^n) = W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$

用 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的函数来逼近；(m, p')-极集(polar sets)

推论 3.19 使人联想到下面的问题：对什么样的区域 Ω，$W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$，即什么时候 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密？这个问题的部分回答可以用 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 中的广义函数的性质来系统地陈述. 下面给出的方法是属于 Lions [39] 的.

3.20 以下讨论中我们始终假定 $1 < p < \infty$ 而且 p' 是 p 的共轭数. 设 F 是 $\mathbf{R}^n$ 的闭子集，假如对一切在 F 上恒等于 0 的 $\phi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，$T(\phi) = 0$，我们就说广义函数 $T \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 的支集在 F 中 ($\text{supp}T \subset F$). 如果支集在 F 中的 $W^{-m,p'}(\mathbf{R}^n)$ 的广义函数 T 只能是零广义函数 $T = 0$，我们就说闭集 F 是 (m, p')-极集.

如果F具有正测度,那么F不可能是$(m\ p')$-极集，因为具有正测度的F的任何紧子集的特征函数属于$L^{p'}(\mathbf{R}^n)$，因此属于$W^{-m,p'}(\mathbf{R}^n)$.

以后我们将证明，如果$mp>n$,则在如下的意义下$W^{m,p}(\mathbf{R}^n)\to C(\mathbf{R}^n)$（见定理5.4）：即，如果$u\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$，则存在$u_0\in C(\mathbf{R}^n)$使得$u(x)=u_0(x)$ a.e.，而且

$$|u_0(x)|\leqslant \text{const}\|u\|_{m,p},$$

常数与x和u无关,由此得到,由$\delta_x(\phi)=\phi(x)$给出的Dirac广义函数δ_x属于$(W^{m,p}(\mathbf{R}^n))'=(W_0^{m,p}(\mathbf{R}^n))'\cong W^{-m,p'}(\mathbf{R}^n)$. 因此,当$mp>n$时,除非$F$是空集,集合$F$不可能是$(m,p')$-极集.

3.21 因为$W^{m+1,p}(\mathbf{R}^n)\to W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$，任何$W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$上的有界线性泛函也是$W^{m+1,p}(\mathbf{R}^n)$上的有界线性泛函，即$W^{-m,p'}(\Omega)\subset W^{-m-1,p'}(\Omega)$. 因此任何$(m+1,p')$-极集也是$(m,p')$-极集. 当然反过来说,一般是不对的.

设映射$u\to\tilde{u}$表示u在区域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$外的零延拓:

$$\tilde{u}(x)=\begin{cases}u(x) & \text{当 } x\in\Omega\text{时}\\ 0 & \text{当 } x\in\Omega^c\text{ 时}\end{cases}\tag{11}$$

下面的引理证明了该映射把$W_0^{m,p}(\Omega)$(等距地)映射到$W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$中去.

3.22 引理 设$u\in W_0^{m,p}(\Omega)$. 如果$|\alpha|\leqslant m$,则在$\mathbf{R}^n$中在广义函数意义下$D^\alpha\tilde{u}=(D^\alpha u)^\sim$. 因此$\tilde{u}\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$.

证明 设$C_0^\infty(\Omega)$中的序列$\{\phi_n\}$在$W_0^{m,p}(\Omega)$中收敛到u. 如果$\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$,对于$|\alpha|\leqslant m$,我们有

$$(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{u}(x)D^\alpha\psi(x)dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha\psi(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega\phi_n(x)D^\alpha\psi(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}D^{\alpha}\phi_n(x)\psi(x)dx=\int_{\mathbf{R}^n}(D^{\alpha}u)^{\sim}(x)\psi(x)dx.$$

于是在 $\mathbf{R}^n$ 上在广义函数意义下 $D^{\alpha}\tilde{u}=(D^{\alpha}u)^{\sim}$ 因此这些局部可积函数在 $\mathbf{R}^n$ 中是几乎处处相等的，由此得到 $\|\tilde{u}\|_{m,p,\mathbf{R}^n}=\|u\|_{m,p,\Omega}$. ▌

现在我们给出映射(11)把 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 等距地映射到 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 上的关于Ω的一个必要充分条件.

3.23 定理 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 中稠密当且仅当Ω的余集 Ω^c 是 (m,p')-极集.

证明 先假设 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 中稠密. 设 $T\in W^{-m,p'}(\mathbf{R}^n)$ 具有包含在Ω^c 中的支集. 如果 $u\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$，则存在一个序列$\{\phi_n\}\subset C_0^{\infty}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 中收敛到 u. 因此 $T(u)=\lim\limits_{n\to\infty}T(\phi_n)=0$，所以 $T=0$，因而 Ω^c 是 (m,p')-极集.

反之，若 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 中不稠密，则存在 $u\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 使得对于一切 $\phi\in C_0^{\infty}(\Omega)$，$\|u-\phi\|_{m,p,\mathbf{R}^n}\geqslant k>0$，$k$ 与ϕ 无关，根据 Hahn-Banach 延拓定理存在$T\in W^{-m,p'}(\mathbf{R}^n)$使得对一切$\phi\in C_0^{\infty}(\Omega)$，$T(\phi)=0$，但 $T(u)\neq 0$. 因为 $\operatorname{supp}T\subset\Omega^c$ 但 $T\neq 0$，所以 Ω^c 不可能是 (m,p')-极集. ▌

对于可微函数来说以下事实是显然的，即，在矩形上一阶导数恒等于零蕴含着在矩形上函数恒等于常数. 作为我们研究 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 和 $W^{m,p}(\Omega)$ 是可能恒同的最后一个准备工作就是首先把这一事实推广到广义函数，而后再推广到局部可积函数.

3.24 引理 设$B=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_n,b_n)$是 $\mathbf{R}^n$ 中一开的长方形盒子，设 $\phi\in\mathscr{D}(B)$. 若$\int_B\phi(x)dx=0$，则 $\phi(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}\phi_j(x)$，其中 $\phi_j\in\mathscr{D}(B)$而且对每个固定的$(x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^{n-1}$

$$\int_{a_j}^{b_j}\phi_j(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)dx_j=0. \tag{12}$$

证明 对于 $1\leqslant j\leqslant n$ 选函数 $u_j\in C_0^\infty(a_j,b_j)$ 使得

$$\int_{a_j}^{b_j}u_j(t)dt=1.$$

设

$$B_j=(a_j,b_j)\times(a_{j+1},b_{j+1})\times\cdots\times(a_n,b_n),$$

$$\psi_j(x_j,\cdots,x_n)=\int_{a_1}^{b_1}dt_1\int_{a_2}^{b_2}dt_2\cdots\int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}}\phi(t_1,\cdots,t_{j-1},x_j,\cdots,x_n)dt_{j-1},$$

$$\omega_j(x)=u_1(x_1)\cdots u_{j-1}(x_{j-1})\psi_j(x_j,\cdots,x_n).$$

则 $\psi_j\in\mathscr{D}(B_j)$ 而 $\omega_j\in\mathscr{D}(B)$. 而且

$$\int_{B_j}\psi_j(x_j,\cdots,x_n)dx_j\cdots dx_n=\int_B\phi(x)dx=0.$$

设 $\phi_1=\phi-\omega_2,\ \phi_j=\omega_j-\omega_{j+1}\ (2\leqslant j\leqslant n-1),\ \phi_n=\omega_n.$

显然，对于 $1\leqslant j\leqslant n,\ \phi_j\in\mathscr{D}(B)$，而且 $\phi=\sum_{j=1}^{n}\phi_j$. 最后，

$$\begin{aligned}&\int_{a_1}^{b_1}\phi_1(x_1,\cdots,x_n)dx_1\\&=\int_{a_1}^{b_1}\phi(x_1,\cdots,x_n)dx_1-\psi_2(x_2,\cdots,x_n)\int_{a_1}^{b_1}u_1(x_1)dx_1=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_{a_j}^{b_j}\phi_j(x_1,\cdots,x_n)dx_j=u_1(x_1)\cdots u_{j-1}(x_{j-1})\\&\times\left(\int_{a_j}^{b_j}\psi_j(x_j,\cdots,x_n)dx_j-\psi_{j+1}(x_{j+1},\cdots,x_n)\int_{a_j}^{b_j}u_j(x_j)dx_j\right)=0\end{aligned}$$

$$2\leqslant j\leqslant n-1$$

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{b_n}\phi_n(x_1,\cdots,x_n)dx_n&=u_1(x_1)\cdots u_{n-1}(x_{n-1})\int_{a_n}^{b_n}\psi_n(x_n)dx_n\\&=u_1(x_1)\cdots u_{n-1}(x_{n-1})\int_B\phi(x)dx=0.\end{aligned}$$ ∎

3.25 推论 如果 $T\in\mathscr{D}'(B)$ 而且对于 $1\leqslant j\leqslant n,\ D_jT=0$，则存在

常数 k 使得对于一切 $\phi\in\mathscr{D}(B)$

$$T(\phi)=k\int_B\phi(x)dx.$$

证明 首先注意到如果$\int_B\phi(x)dx=0$, 则 $T(\phi)=0$, 因为由上面的引理, 我们可以把 $\phi(x)$写成 $\phi=\sum_{j=1}^{n}\phi_j$, 其中 $\phi_j\in\mathscr{D}(B)$ 且满足(12), 因此, $\phi_j=D_j\theta_j$, 其中 $\theta_j\in\mathscr{D}(B)$ 由

$$\theta_j(x)=\int_{a_j}^{x_j}\phi_j(x_1,\cdots,x_{j-1},t,x_{j+1},\cdots,x_n)dt$$

定义, 因此 $T(\phi)=\sum_{j=1}^{n}T(D_j\theta_j)=-\sum_{j=1}^{n}D_jT(\theta_j)=0.$

现在假设 $T\neq0$. 则存在 $\phi_0\in\mathscr{D}(B)$ 使 $T(\phi_0)=k_1\neq0$. 因此 $\int_B\phi_0(x)dx=k_2\neq0$, 而且 $T(\phi_0)=k\int_B\phi_0(x)dx$, 其中 $k=k_1/k_2$. 如果 $\phi\in\mathscr{D}(B)$是任意的, 设 $K(\phi)=\int_B\phi(x)dx$. 则

$$\int_B\left(\phi(x)-\frac{K(\phi)}{k_2}\phi_0(x)\right)dx=0$$

所以 $T(\phi-[K(\phi)/k_2]\phi_0)=0$, 由此得到

$$T(\phi)=\frac{K(\phi)}{k_2}T(\phi_0)=kK(\phi)=k\int_B\phi(x)dx. \blacksquare$$

应该指出这个推论能推广到 $\mathbf{R}^n$ 中任何开的连通集B, 这种推广通过一个从属于Ω的某个开覆盖的单位分解来实现. 这个开覆盖是由包含在Ω中开的长方形盒子构成. 但我们将来不需要这种推广.

下面的引理证明了开集Ω上不同的局部可积函数决定Ω上不同的广义函数.

3.26 引理 设 $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$对于一切 $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$ 满足$\int_\Omega u(x)\phi(x)dx=0$. 则在$\Omega$中 $u(x)=0$ a.e..

证明 如果 $\psi\in C_0(\Omega)$，则对充分小的正 ε，软化子 $J_\varepsilon*\psi$ 属于 $\mathscr{D}(\Omega)$. 由引理 2.18，当 $\varepsilon\to0+$ 时，在 Ω 上一致地有 $J_\varepsilon*\psi\to\psi$. 因此对一切 $\psi\in C_0(\Omega)$，$\int_\Omega u(x)\psi(x)dx=0$.

设 $K\subset\subset\Omega$，又设 $\varepsilon>0$. 设 χ_K 是 K 的特征函数. 则 $\int_K|u(x)|dx<\infty$，存在 $\delta>0$ 使得对于任何可测集 $A\subset K$，$\mu(A)<\delta$，我们有 $\int_A|u(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}$（例如，参看 Munroe 的书[48, p. 136]）.

由 Lusin 定理 1.37(f) 存在 $\psi\in C_0(\Omega)$，其中 $\operatorname{supp}\psi\subset K$ 且对于一切 x，$|\psi(x)|\leqslant1$，使得

$$\mu(\{x\in\Omega:\ \psi(x)\neq\chi_K(x)\operatorname{sgn}\overline{u(x)}\})<\delta,$$

这里

$$\operatorname{sgn}v(x)=\begin{cases}v(x)/|v(x)| & \text{当 } v(x)\neq0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } v(x)=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_K|u(x)|dx&=\int_\Omega u(x)\chi_K(x)\operatorname{sgn}\overline{u(x)}dx\\ &=\int_\Omega u(x)\psi(x)dx+\int_\Omega u(x)[\chi_K(x)\operatorname{sgn}\overline{u(x)}-\psi(x)]dx\\ &\leqslant2\int_{\{x\in\Omega:\psi(x)\neq\chi_K(x)\operatorname{sgn}\overline{u(x)}\}}|u(x)|dx<\varepsilon.\end{aligned}$$

因为 ε 是任意的，在 K 中 $u(x)=0$ a.e. 因此在 Ω 中 $u(x)=0$ a.e.. ∎

3.27 推论 如果 B 是在引理 3.24 中所说的长方形盒子，而且 $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(B)$，对于 $1\leqslant j\leqslant n$ 有弱导数 $D_ju=0$，则对某个常数 k，在 B 中 $u(x)=k$ a.e..

证明 因为 $D_jT_u=0$，$1\leqslant j\leqslant n$，由推论 3.25 我们有

$$\int_B u(x)\phi(x)dx=T_u(\phi)=k\int_B\phi(x)dx.$$

因此在B中 $u(x)-k=0$ a. e.. ∎

3.28 定理 (1) 若$W^{m,p}(\Omega)=W_0^{m,p}(\Omega)$，则$\Omega^c$是$(m,p')$-极集. (2) 若$\Omega^c$既是$(1,p)$-极集又是$(m,p')$-极集，则$W^{m,p}(\Omega)=W_0^{m,p}(\Omega)$.

证明 (1) 假定$W^{m,p}(\Omega)=W_0^{m,p}(\Omega)$. 我们首先推出$\Omega^c$的测度一定为零. 如其不然，应该存在某个开长方形盒子$B\subset\mathbf{R}^n$，它和Ω，Ω^c的交集的测度均为正. 设u是在$B\cap\Omega$上恒等于1的$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$中的函数在Ω上的限制. 则$u\in W^{m,p}(\Omega)$，从而$u\in W_0^{m,p}(\Omega)$. 由引理3.22，$\tilde{u}\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$而且对于$1\leqslant j\leqslant n$，在$\mathbf{R}^n$中在广义函数意义下$D_j\tilde{u}=(D_ju)^\sim$. 现在$(D_ju)^\sim$在$B$上恒等于零，因此$D_j\tilde{u}$作为一个广义函数也就在$B$上恒等于零. 由推论3.27，$\tilde{u}$在$B$中必须几乎处处等于常数. 因为在$B\cap\Omega$上$\tilde{u}(x)=1$而在$B\cap\Omega^c$上$\tilde{u}(x)=0$，我们得到一个矛盾. 因此$\Omega^c$的测度为零.

现在如果$v\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$而且$u$是$v$在$\Omega$上的限制，则$u$属于$W^{m,p}(\Omega)$，因此根据假定$u$属于$W_0^{m,p}(\Omega)$. 由引理3.22，$\tilde{u}\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$而且能用$C_0^\infty(\Omega)$中的函数来逼近，但在$\Omega$上$v(x)=\tilde{u}(x)$，即在$\mathbf{R}^n$中几乎处处相等. 因此$v$和$\tilde{u}$有相同的广义导数从而在$W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$中重合. 所以$C_0^\infty(\Omega)$在$W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$中稠密从而由定理3.23，$\Omega^c$是$(m,p')$-极集.

(2) 现在假定Ω^c是$(1,p)$-极集而且是(m,p')-极集. 设$u\in W^{m,p}(\Omega)$. 我们证明$u\in W_0^{m,p}(\Omega)$. 因为$\tilde{u}\in L^p(\mathbf{R}^n)$，与$D_j\tilde{u}$相应的广义函数$T_{D_j\tilde{u}}$属于$W^{-1,p}(\mathbf{R}^n)$. 因为$(D_ju)^\sim\in L^p(\mathbf{R}^n)\subset H^{-1,p}(\mathbf{R}^n)$，所以$T_{(D_ju)^\sim}\in W^{-1,p}(\mathbf{R}^n)$，因此$T_{D_j\tilde{u}-(D_ju)^\sim}\in W^{-1,p}(\mathbf{R}^n)$. 但是在$\Omega$上$D_j\tilde{u}-(D_ju)^\sim$等于零，所以$\operatorname{supp}T_{D_j\tilde{u}-(D_ju)^\sim}\subset\Omega^c$. 因为$\Omega^c$是$(1,p)$-极集，在$\mathbf{R}^n$上在广义函数意义下$D_j\tilde{u}=(D_ju)^\sim$. 通过对$|\alpha|$做归纳法，类似地我们能够证明对于$|\alpha|\leqslant m$在广义函数意义下$D^\alpha\tilde{u}=(D^\alpha u)^\sim$. 所以$\tilde{u}\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$，因此由定理3.23，由

于 Ω^c 是(m,p')-极集，$\tilde{u}$ 在Ω上的限制 u 属于 $W_0^{m,p}(\Omega)$. ∎

如果(m,p')-极性蕴含着$(1,p)$-极性，那么定理 3.28 相当于断言：Ω^c 的(m,p')-极性是 $W^{m,p}(\Omega)$和 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 相等的充要条件. 现在我们来考察这种可能性，首先建立包含着极性的重要性质的两个引理. 第一个引理证明了(m,p')-极性是一种局部性质.

3.29 引理 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是 (m,p')-极集当且仅当对一切紧集 $K\subset\mathbf{R}^n$, $F\cap K$ 是(m,p')-极集.

证明 显然对于一切紧集 K, F的(m,p')-极性蕴含着$F\cap K$的(m,p')-极性. 现在我们证明其逆. 设 $T\in W^{-m,p'}(\mathbf{R}^n)$是由(8)式给出的而且$T$的支集在$F$中. 我们必须证明 $T=0$. 设 $f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 它满足：当 $|x|\leqslant 1$ 时 $f(x)=1$，而当 $|x|\geqslant 2$ 时 $f(x)=0$. 对于 $\varepsilon>0$，设 $f_\varepsilon(x)=f(\varepsilon x)$ 所以当 $\varepsilon\to0+$时对 x 一致地有 $D^\alpha f_\varepsilon(x)=\varepsilon^{|\alpha|}D^\alpha f(\varepsilon x)\to0$. 则 $f_\varepsilon T\in W^{-m,p'}(\mathbf{R}^n)$ 而且对任何 $\phi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$我们有

$$
\begin{aligned}
&|T(\phi)-f_\varepsilon T(\phi)|=|T(\phi)-T(f_\varepsilon\phi)|\\
&=\left|\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\int_{\mathbf{R}^n}v_\alpha(x)D^\alpha[\phi(x)(1-f_\varepsilon(x))]dx\right|\\
&=\left|\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\int_{\mathbf{R}^n}v_\alpha(x)D^\beta\phi(x)D^{\alpha-\beta}(1-f_\varepsilon(x))dx\right|\\
&\leqslant\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant m}\int_{R^n}\left|w_\beta(x)D^\beta\phi(x)\right|dx\leqslant\|\phi\|_{m,p}\|w;L_N^{p'}\|,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
w_\beta(x)&=\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\ \alpha\geqslant\beta}}\binom{\alpha}{\beta}v_\alpha(x)D^{\alpha-\beta}(1-f_\varepsilon(x))\\
&=v_\beta(x)(1-f_\varepsilon(x))-\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\ \alpha\geqslant\beta,\ \alpha\neq\beta}}\binom{\alpha}{\beta}v_\alpha(x)D^{\alpha-\beta}f_\varepsilon(x).
\end{aligned}
$$

因为对于$|x|\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$，$f_\varepsilon(x)=1$，我们有 $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\|w_\beta\|_p=0$. 因此

当 $\varepsilon\to 0+$ 时在 $W^{-m,p'}(\mathbf{R}^n)$ 中 $f_\varepsilon T\to T$. 由于 $f_\varepsilon T$ 在 K 中有紧支集，根据假定 $f_\varepsilon T=0$, 因此 $T=0$. ▌

3.30 引理 如果 $p'\leqslant q'$ 且 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是 (m,p')-极集，则 F 也是 (m,q')-极集.

证明 设 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是紧的. 由引理 3.29，只要证明 $F\cap K$ 是 (m,q')-极集就够了. 设 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中包含 K 的有界开集. 根据引理 2.8, $W_0^{m,p}(G)\to W_0^{m,q}(G)$，所以 $W^{-m,q'}(G)\subset W^{-m,p'}(G)$. 任何支集在 $K\cap F$ 中的广义函数 $T\in W^{-m,q'}(\mathbf{R}^n)$ 也属于 $W^{-m,q'}(G)$, 因此属于 $W^{-m,p'}(G)$. 因为 $K\cap F$ 是 (m,p')-极集, $T=0$. 因此 $K\cap F$ 是 (m,q')-极集. ▌

3.31 定理 设 $p\geqslant 2$. 则 $W^{m,p}(\Omega)=W_0^{m,p}(\Omega)$ 当且仅当 Ω^c 是 (m,p')-极集.

证明 若 Ω^c 是 (m,p')-极集, 因为 $p'\leqslant p$, 所以 Ω^c 是 (m,p)-极集, 因此 Ω^c 也是 $(1,p)$-极集. 现在由定理 3.28 就得到所要结果. ▌

3.32 能够利用 Sobolev 嵌入定理(定理 5.4) 把定理 3.31 推广到包括某些 $p<2$ 的情形. 当 $(m-1)p<n$ 时, 嵌入定理给出

$$W^{m,p}(\mathbf{R}^n)\to W^{1,q}(\mathbf{R}^n),\ q=np/[n-(m-1)p],$$

这也蕴含着 $W^{-1,q'}(\mathbf{R}^n)\subset W^{-1,p'}(\mathbf{R}^n)$. 如果还有 $p\geqslant 2n/(n+m-1)$, 则 $q'\leqslant p$，所以由引理 3.30，如果 Ω^c 是 (m,p')-极集，则 Ω^c 是 $(1,p)$-极集. 注意到假如 $m>1$ 则 $2n/(n+m-1)<2$. 另一方面，如果 $(m-1)p\geqslant n$, 则 $mp>n$, 而且, 如同在 3.20 节中指出的那样, 除非 Ω^c 是空集, 这时 Ω^c 明显地是 $(1,p)$-极集, Ω^c 不能是 (m,p')-极集.

因此仅对于由 $1\leqslant p\leqslant\min\left(\dfrac{n}{m-1},\dfrac{2n}{n+m-1}\right)$ 给出的 p 值才不知道 Ω^c 的 (m,p')-极性能否蕴含着 Ω^c 的 $(1,p)$-极性，因此也等价于不知道 $W^{m,p}(\Omega)$ 和 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 是否恒同.

3.33 当$W_0^{m,p}(\Omega)\neq W^{m,p}(\Omega)$时，$W_0^{m,p}(\Omega)$是$W^{m,p}(\Omega)$的闭子空间．在Hilbert空间的情形，$p=2$，我们可以考虑由所有的$v\in W^{m,p}(\Omega)$使得对一切$\phi\in C_0^\infty(\Omega)$，$(v,\ \phi)_m=0$的那种函数组成的空间$W_0^\perp$，每个$u\in W^{m,p}(\Omega)$能够唯一地分解成$u=u_0+v$的形式，其中$u_0\in W_0^{m,p}(\Omega)$而$v\in W_0^\perp$．利用分部积分可以证明，任何$v\in W_0^\perp$在弱的意义下一定满足

$$\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}v(x)=0,$$

因此在Ω中 a. e. 等于零.

坐标变换

3.34 设$\boldsymbol{\Phi}$是区域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$到区域$G\subset\mathbf{R}^n$上的一一的变换，$\boldsymbol{\Phi}$有逆$\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}$．记$y=\boldsymbol{\Phi}(x)$以及

$$\begin{aligned}
y_1&=\phi_1(x_1,\cdots,x_n), & x_1&=\psi_1(y_1,\cdots,y_n)\\
y_2&=\phi_2(x_1,\cdots,x_n), & x_2&=\psi_2(y_1,\cdots,y_n)\\
&\ \ \vdots & &\ \ \vdots\\
y_n&=\phi_n(x_1,\cdots,x_n), & x_n&=\psi_n(y_1,\cdots,y_n),
\end{aligned}$$

如果函数$\phi_1,\cdots,\phi_n$属于$C^m(\overline{\Omega})$而函数$\psi_1,\cdots,\psi_n$属于$C^m(\bar{G})$我们就把$\boldsymbol{\Phi}$叫做是m-光滑的.

如果u是定义在Ω上的可测函数，我们能够用

$$Au(y)=u(\boldsymbol{\Psi}(y)) \tag{13}$$

定义G上的一个可测函数．假设$\boldsymbol{\Phi}$是1-光滑的，所以对一切$x\in\Omega$，对于某些常数$c, C, 0<c\leqslant C$，

$$c\leqslant|\det\boldsymbol{\Phi}'(x)|\leqslant C \tag{14}$$

[当然，这里$\boldsymbol{\Phi}'(x)$表示Jacobi矩阵$\partial(y_1,\cdots,y_n)/\partial(x_1,\cdots,x_n)$]．不难看出，由(13)定义的算子$A$把$L^p(\Omega)$有界地变换到$L^p(G)$上，而且有一个有界的逆算子．事实上(对于$1\leqslant p<\infty$)

$$c^{\frac{1}{p}}\|u\|_{p,\Omega}\leqslant\|Au\|_{p,G}\leqslant C^{\frac{1}{p}}\|u\|_{p,\Omega}.$$

对于 Sobolev 空间我们建立一个类似的结果.

3.35 定理 设Φ是 m-光滑的，其中 $m\geqslant 1$. 则 A 把$W^{m,p}(\Omega)$ 有界地变换到 $W^{m,p}(G)$上而且有一个有界的逆算子.

证明 我们现在证明对任何 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 不等式 $\|Au\|_{m,p,G}\leqslant \text{const}\|u\|_{m,p,\Omega}$ 成立，常数只依赖于变换Φ. 利用算子 A^{-1} 把定义在G上的函数变换到定义在Ω上的函数，用类似的方法能建立逆不等式$\|Au\|_{m,p,G}\geqslant\text{const}\|u\|_{m,p,\Omega}$.

由定理 3.16 对于任何 $u\in W^{m,p}(\Omega)$存在一个 $C^\infty(\Omega)$ 的序列 $\{u_n\}$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$的范数下收敛到 u，对于这种光滑的 u_n 用归纳法容易验证

$$D^\alpha(Au_n)(y)=\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}M_{\alpha\beta}(y)[A(D^\beta u_n)](y),\tag{15}$$

其中$M_{\alpha\beta}$是一个次数不超过$|\alpha|$的由Ψ的各个分量构成的多项式，其中有关 Ψ 分量的导数的次数不超过$|\beta|$. 如果 $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$，我们从(15)和分部积分得到

$$\begin{aligned}&(-1)^{|\alpha|}\int_G(Au_n)(y)D^\alpha\phi(y)dy\\&=\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\int_G[A(D^\beta u_n)](y)M_{\alpha\beta}(y)dy,\end{aligned}\tag{16}$$

或，用$\Phi(x)$来代替 y 而把Ω上的积分表为

$$\begin{aligned}&(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_n(x)(D^\alpha\phi)(\Phi(x))|\det\Phi'(x)|dx\\&=\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\int_\Omega D^\beta u_n(x)M_{\alpha\beta}(\Phi(x))|\det\Phi'(x)|dx.\end{aligned}\tag{17}$$

因为对$|\beta|\leqslant m$ 在 $L^p(\Omega)$中 $D^\beta u_n\to u$. 当 $n\to\infty$时，我们可以通过(17)式取极限，因此我们得到用 u 代替 u_n 的(16)式. 因此对于任何$u\in W^{m,p}(\Omega)$ 在弱的意义下(15)式成立. 从(15)式和(14) 式我们得到

$$\int_G |D^\alpha (Au)(y)|^p dy$$

$$\leqslant \left(\sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} 1 \right)^p \max_{|\beta| \leqslant |\alpha|} \left(\sup_{y \in G} |M_{\alpha\beta}(y)|^p \int_G |(D^\beta u)(\Psi(y))|^p dy \right)$$

$$\leqslant \text{const} \max_{|\beta| \leqslant |\alpha|} \int_\Omega |D^\beta u(x)|^p dx.$$

由此得到 $\|Au\|_{m,p,G} \leqslant \text{const} \|u\|_{m,p,\Omega}$. ∎

在以后各章中特别重要的是与非奇异的线性变换Φ，或更一般地，仿射变换(由非奇异的线性变换和平移组成)相应的上述定理。对于这种变换 $\det\Phi'(x)$是非零常数。

第四章　内插和延拓定理

区域的几何性质

4.1 定义在区域Ω上的Sobolev 空间的很多性质，特别是这些空间的嵌入性质，依赖于Ω的正则性．这些正则性通常表示为任一给定区域可能满足也可能不满足的几何条件．我们下面指出五个这样的几何条件，包括在第3.17节已经遇到的线段性质，并且考虑它们之间的关系．首先，我们引进某些有用的几何概念和符号．

给定点$x\in\mathbf{R}^n$，中心为x的开球B_1，不包含x的开球B_2，集合$C_x=B_1\cap\{x+\lambda(y-x):y\in B_2,\lambda>0\}$称为顶点在$x$的$\mathbf{R}^n$内有限锥．我们还把顶点在0的有限锥$C_0$经过平移变换后得到的顶点在$x$的有限锥记作$x+C_0=\{x+y:y\in C_0\}$．

给定线性无关向量$y_1,y_2,\cdots,y_n\in\mathbf{R}^n$，集合$P=\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j:0<\lambda_j<1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$是一个有一个顶点在原点的平行多面体．类似地，$x+P$为$P$的平移变换，它有一个顶点在$x$．显然，我们说$x+P$的中心，指的是点$c(x+P)=x+\frac{1}{2}(y_1+\cdots\cdots+y_n)$．每一个有一顶点在$x$的平行多面体都包含一个顶点在$x$的有限锥，反之，它也包含在这样的一个有限锥内．

集合$S\subset\mathbf{R}^n$的一个开覆盖$\mathscr{O}$称为是局部有限的，如果$\mathbf{R}^n$内任一紧集合最多只能和$\mathscr{O}$的有限个元素相交．这种局部有限的集合组必定是可数的，因此它的元素可排成序列．如果S是闭的，则S的任一开覆盖有局部有限的子覆盖．

我们现在定义开区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 可能具有的五个正则性.

4.2 Ω具有线段性质，如果存在bdryΩ 的局部有限开覆盖$\{U_j\}$并且存在对应的非零向量序列 $\{y_j\}$ 使得若对某一 j，$x\in\overline{\Omega}\cap U_j$，则对 $0<t<1, x+ty_j\in\Omega$.

4.3 Ω具有锥性质，如果存在有限锥C使每一点 $x\in\Omega$ 是一个包含于Ω 内且全等于C 的有限锥 C_x 的顶点.（注意 C_x 不需要由C经平移变换得到，而只要是刚体运动.）

4.4 Ω具有一致锥性质，如果 bdryΩ 有局部有限的开覆盖$\{U_j\}$，以及对应的有限锥序列$\{C_j\}$，每一 C_j 全等于某一固定的有限锥 C，使:

(i) 对某一有限的M，每一 U_j 直径小于M.

(ii) 对某一 $\delta>0$，$\bigcup_{j=1}^{\infty}U_j\supset\Omega_\delta\equiv\{x\in\Omega:\mathrm{dist}(x,\mathrm{bdry}\,\Omega)<\delta\}$.

(iii) 对每个 j，$\bigcup_{x\in\Omega\cap U_j}(x+C_j)\equiv Q_j\subset\Omega$.

(iv) 对某一有限 R，集合 Q_j 中的任意 $R+1$ 个交于空集.

4.5 Ω具有强局部 Lipschitz 性质，如果存在正数 δ 和 M，bdryΩ 的一个局部有限开覆盖$\{U_j\}$，以及对每一 U_j 有一个 $n-1$ 个实变量的实值函数 f_j，使得以下条件成立:

(i) 对某一有限 R，集合 U_j 中的任意 $R+1$ 个交于空集.

(ii) 对所有满足 $|x-y|<\delta$ 的点对 $x, y\in\Omega_\delta=\{x\in\Omega:\mathrm{dist}(x,\mathrm{bdry}\,\Omega)<\delta\}$存在 j 使得

$$x, y\in\mathscr{V}_j=\{x\in U_j:\mathrm{dist}(x,\mathrm{bdry}\,U_j)>\delta\}.$$

(iii) 每一函数 f_j 满足关于常数M的 Lipschitz 条件:

$$|f(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})-f(\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})|\leqslant M|(\xi_1-\eta_1,\cdots,\xi_{n-1}-\eta_{n-1})|.$$

(iv) 对某一 U_j 内的笛卡尔坐标系$(\xi_{j,1},\cdots,\xi_{j,n})$，集合$\Omega\cap U_j$由不等式

$$\xi_{j,n}<f_j(\xi_{j,1},\cdots\cdots,\xi_{j,n-1})$$

表示.

我们注意到，如果Ω为有界，以上相当复杂的条件简化为Ω有局部 Lipschitz 边界，即，Ω的边界上每一点x有一个邻域U_x使 bdry $\Omega\cap U_x$是一个 Lipschitz 连续函数的图.

4.6 Ω具有一致C^m-正则性，如果存在 bdryΩ的一个局部有限开覆盖$\{U_j\}$，以及对应的m-光滑一一变换的序列$\{\Phi_j\}$（见第3.34节），Φ_j把U_j映到$B=\{y\in\mathbf{R}^n:|y|<1\}$上，使:

(i) 对某一$\delta>0$，$\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\Psi_j\left(\left\{y\in\mathbf{R}^n:|y|<\frac{1}{2}\right\}\right)\supset\Omega_\delta$，其中$\Psi_j=\Phi_j^{-1}$.

(ii) 对某一有限R，集合U_j中的任意$R+1$个交于空集.

(iii) 对每一j，$\Phi_j(U_j\cap\Omega)=\{y\in B:y_n>0\}$.

(iv) 如果$(\phi_{j,1},\cdots,\phi_{j,n})$和$(\psi_{j,1},\cdots,\psi_{j,n})$分别表示$\Phi_j$和$\Psi_j$的分量，则存在有限$M$，使对所有的$\alpha$，$|\alpha|\leqslant m$，对所有的$i$，$1\leqslant i\leqslant n$，和对所有的$j$，我们有

$$|D^\alpha\phi_{j,i}(x)|\leqslant M,\qquad x\in U_j$$

$$|D^\alpha\psi_{j,i}(y)|\leqslant M,\qquad y\in B.$$

4.7 除了锥性质以外，所有以上其他性质都要求Ω只在它的边界的一边．在第3.17节中提到的二维区域Ω．即:

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:0<|x|<1,0<y<1\}$$

具有锥性质但其余四个都不具备．读者可以验证对任意的区域Ω

一致C^m-正则性$(m\geqslant1)$

$\Rightarrow$ 强局部 Lipschitz 性质

$\Rightarrow$ 一致锥性质

$\Rightarrow$ 线段性质.

第五章中大部分重要的嵌入结果只要求锥性质，然而有一个

要求强局部 Lipschitz 性质. 尽管锥性质不蕴涵以上其它性质，然而它对有界区域“几乎”蕴涵强局部 Lipschitz 性质，确切意义为下面 Gagliardo 的定理[24].

4.8 定理 (Gagliardo[24]) 设Ω为$\mathbf{R}^n$中具有锥性质的有界区域，对于每一$\rho>0$，存在Ω的开子集的有限集族$\{\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_m\}$，使得$\Omega=\bigcup_{j=1}^{m}\Omega_j$并且每个$\Omega_j$对应一个$\overline{\Omega}_j$的子集$A_j$，直径不超过$\rho$，以及一个有一顶点在$O$的开平行多面体$P_j$，使得$\Omega_j=\bigcup_{x\in A_j}(x+P_j)$. 此外，如果$\rho$充分小，则每一个$\Omega_j$具有强局部 Lipschitz 性质.

证明 设C_0为顶点在O的有限锥，使任意的$x\in\Omega$都是与C_0全等的有限锥$C_x\subset\Omega$的顶点. 显然可以选有限个有限锥$C_1, \cdots, C_k$，每一个顶点在O(每个的锥角小于C_0的锥角) 使得任何顶点在O的与C_0全等的有限锥必须包含锥C_j中的一个，$1\leqslant j\leqslant k$. 对每一C_j设P_j是一个开平行多面体，它的顶点在原点并且$P_j\subset C_j$. 则对每一$x\in\Omega$存在j, $1\leqslant j\leqslant k$，使

$$x+P_j\subset x+C_j\subset C_x\subset\Omega.$$

因为Ω为开的并且$\overline{x+P_j}$是紧的. 因此对充分接近于x的所有的y, $y+P_j\subset\Omega$. 因此对所有的$x\in\Omega$，我们能找到$y\in\Omega$使对某个j, $1\leqslant j\leqslant k$, $x\in y+P_j\subset\Omega$. (因此任意的有锥性质的区域可以表示为有限多个平行多面体的平移的并.)

设$\widetilde{A}_j=\{x\in\overline{\Omega}: x+P_j\subset\Omega\}$. 如果对每一$j$, $\operatorname{diam}\widetilde{A}_j\leqslant\rho$，我们取$m=k$，令$A_j=\widetilde{A}_j$和$\Omega_j=\bigcup_{x\in A_j}(x+P_j)$，注意定理的第一部分已经证明，否则我们把$\widetilde{A}_j$分解为集合$A_{ji}$的有限并使得$\operatorname{diam}A_{ji}\leqslant\rho$. 令对应的$P_{ji}=P_j$，把全部集合$A_{ji}$重新排列成有限序列$A_1, \cdots, A_m$. 把对应的$P_{ji}$重新命名为$P_1, \cdots, P_m$，最后令$\Omega_j=$

$\bigcup_{x\in A_j}(x+P_j)$得到同样结果.（图 2 试图对于情形

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ 0<|x|<1,0<y<1\},$$

$$C_0=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ x>0,\ y>0,\ x^2+y^2<\frac{1}{4}\right\},$$

$$\rho=13/16$$

表明这些说法. 在此情形Ω可被仅四个开子集 Ω_j 所覆盖，它们仅对应于两个不同的平行多面体.）

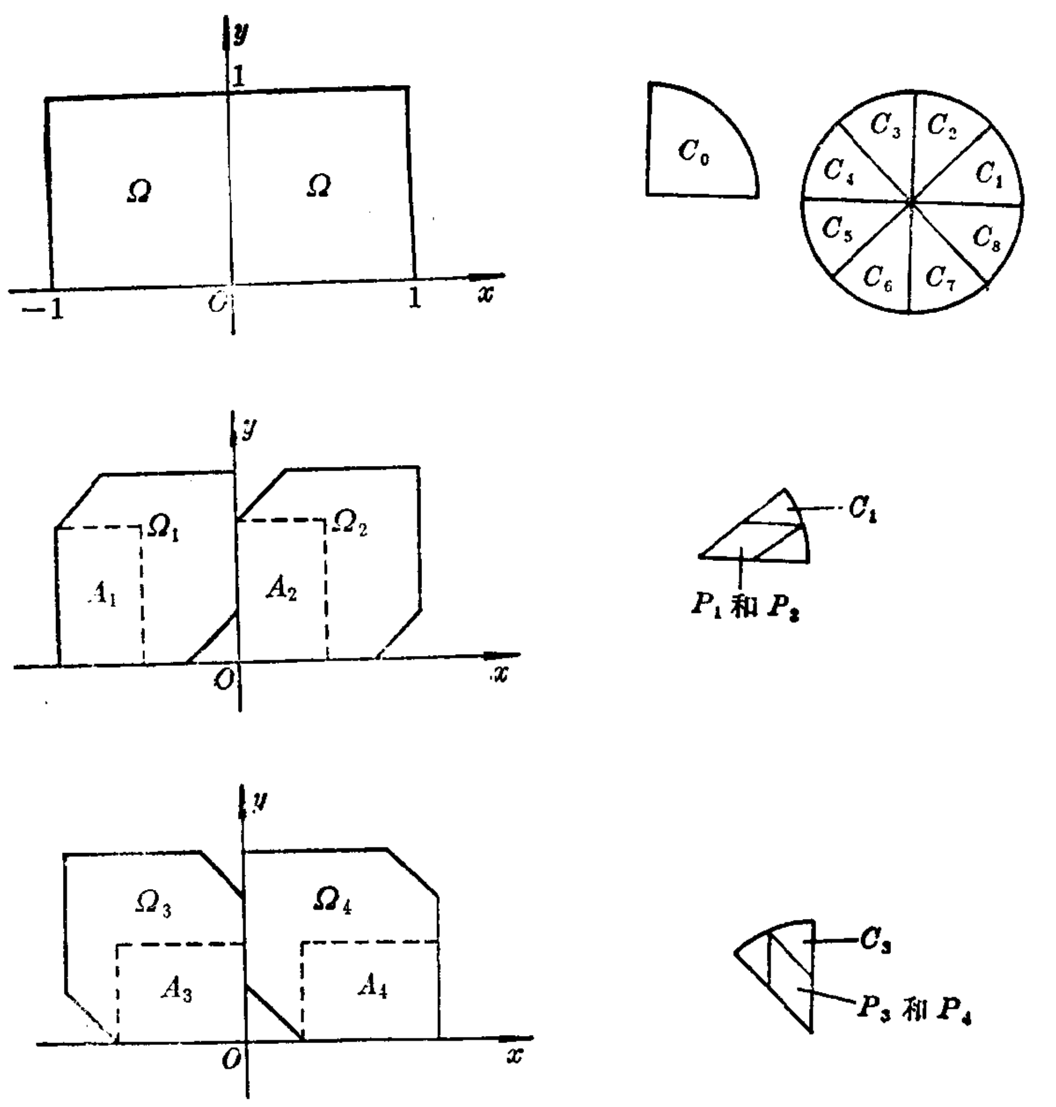


图 2

剩下还要说明如果ρ充分小，则每一 Ω_j 有强局部 Lipschitz

性质．为了符号简单我们假设$\Omega=\bigcup_{x\in A}(x+P)$．其中 $\operatorname{diam}A\leqslant\rho$ 和P是一个固定的平行多面体，我们说明Ω有强局部 Lipschitz 性质．

对P的每个顶点v_j设$Q_j=\{y=v_j+\lambda(x-v_j):x\in P,\ \lambda>0\}$是由$P$生成的顶点为$v_j$的无限锥．则$P=\bigcap Q_j$，这里是对$P$的所有$2^n$个顶点取交集．设$\Omega_{(j)}=\bigcup_{x\in A}(x+Q_j)$，令$\delta=\operatorname{dist}(P$的中心，$\operatorname{bdry}P)$并且令$B$为半径$\sigma=\delta/2$的任意球．对任意的固定$x\in\Omega$，$B$不能与$x+P$的相对两面相交，所以我们可以找到$P$的顶点$v_j$使得$x+v_j$是$x+P$与$B$相交的所有的面的公共点（如果这样的面存在）．则$B\cap(x+P)=B\cap(x+Q_j)$，现设$x,y\in A$并假设$B$能和$x+P$与$y+P$的相应对面相交，即，存在$P$对面上两点$a$和$b$使$x+a\in B$及$y+b\in B$．则

$$\begin{aligned}\rho\geqslant\operatorname{dist}(x,y)&=\operatorname{dist}(x+b,y+b)\\&\geqslant\operatorname{dist}(x+b,x+a)-\operatorname{dist}(x+a,y+b)\\&\geqslant2\delta-2\sigma=\delta\end{aligned}$$

因此若$\rho<\delta$，则对任意的$x,y\in A$，B不能与$x+P$和$y+P$的相应对面相遇．因此对某个固定的j，$B\cap(x+P)=B\cap(x+Q_j)$与$x\in A$无关，从而$B\cap\Omega=B\cap\Omega_{(j)}$．

在B内取坐标$\xi=(\xi',\ \xi_n)=(\xi_1,\cdots,\ \xi_{n-1},\xi_n)$使$\xi_n$轴为从$P$的中心到点$v_j$的向量的方向．则$(x+Q_j)\cap B$在$B$内由形如$\xi_n<f_x(\xi')$的不等式确定，其中$f_x$满足一个常数与$x$无关的 Lipschitz 条件．因此$\Omega_{(j)}\cap B$，因之$\Omega\cap B$，由$\xi_n<f(\xi')$所确定，其中$f(\xi')=\sup_{x\in A}f_x(\xi')$本身是一个 Lipschitz 连续函数．由于对$\operatorname{bdry}\Omega$上任一点的邻域$B$都可以这样做，所以$\Omega$有强局部 Lipschitz 性质．█

中间导数的内插不等式

4.9 我们考虑根据函数 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 及其 $|\alpha|=m$ 阶导数 $D^\alpha u$ 的 L^p-范数来确定导数 $D^\beta u(|\beta|\leqslant m)$ 的 L^p-范数上界的问题，这样的内插不等式曾被很多作者得到，诸如Ehrling[23]，Nirenberg[53, 54]，Browder[11, 12]，和 Gagliardo[24, 25]，并且可以做大量推广．涉及非整数值 m 的 $W^{m,p}(\Omega)$ 的定义的推广通过适当的内插论证就可完成(见第七章)．

从一个简单的一维内插不等式开始是适当的，对下面更一般的定理来说，它仍然是典型的并且提供了证明的基础．

4.10 引理 设 $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$，设 $1\leqslant p<\infty$，并且设 $0<\varepsilon_0<\infty$．存在有限常数 $K=K(\varepsilon_0,p,b-a)$，它对 $0<b-a\leqslant\infty$ 连续地依赖于 $b-a$，使对所有满足 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 的 ε，以及对所有在开区间 (a,b) 上二次连续可微的函数 f

$$\int_a^b|f'(t)|^p dt\leqslant K\varepsilon\int_a^b|f''(t)|^p dt+K\varepsilon^{-1}\int_a^b|f(t)|^p dt. \qquad (1)$$

并且，如果 $b-a=\infty$，则可找到 $K=K(p)$ 使(1)对所有的正数 ε 成立．

证明 只要对实值函数 f 证明(1)就够了，因为，假如已经证明了这一点，把任意 f 写成 $f=u+iv$，u,v 为实值，我们得

$$\int_a^b|f'(t)|^p dt=\int_a^b[u'(t)^2+v'(t)^2]^{p/2}dt$$

$$\leqslant\max(1,2^{(p-2)/2})\int_a^b[|u'(t)|^p+|v'(t)|^p]dt$$

$$\leqslant 2K\max(1,2^{(p-2)/2})\left\{\varepsilon\int_a^b|f''(t)|^p dt+\varepsilon^{-1}\int_a^b|f(t)|^p dt\right\}.$$

不失一般性我们还假定 $\varepsilon_0=1$，因为假定引理已在这种情形证明了，由于 $0<\varepsilon/\varepsilon_0<1$，所以由(1)我们得

$$\int_a^b |f'(t)|^p dt \leqslant K\cdot(\varepsilon/\varepsilon_0)\int_a^b |f''(t)|^p dt$$

$$+K\cdot(\varepsilon_0/\varepsilon)\int_a^b |f(t)|^p dt.$$

随之,它导出(1),$K=K(\varepsilon_0, p, b-a)=K(1, p, b-a)\max(\varepsilon_0, \varepsilon_0^{-1})$.

因此我们假定 f 为实值并且 $\varepsilon_0=1$. 暂时假定 $a=0$ 和 $b=1$. 如果 $0<\xi<\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}<\eta<1$, 则存在 $\lambda\in(\xi, \eta)$ 使

$$|f'(\lambda)|=\left|\frac{f(\eta)-f(\xi)}{\eta-\xi}\right|\leqslant 3|f(\xi)|+3|f(\eta)|.$$

因此对任意的 $x\in(0, 1)$

$$|f'(x)|=|f'(\lambda)+\int_\lambda^x f''(t)dt|$$

$$\leqslant 3|f(\xi)|+3|f(\eta)|+\int_0^1 |f''(t)|dt.$$

对 ξ 在$\left(0, \frac{1}{3}\right)$上和对 η 在$\left(\frac{2}{3}, 1\right)$上积分以上不等式得

$$\frac{1}{9}|f'(x)|\leqslant\int_0^{1/3}|f(\xi)|d\xi+\int_{2/3}^1 |f(\eta)|d\eta+\frac{1}{9}\int_0^1 |f''(t)|dt$$

$$\leqslant\int_0^1 |f(t)|dt+\frac{1}{9}\int_0^1 |f''(t)|dt.$$

由 Hölder 不等式

$$|f'(x)|^p\leqslant 2^{p-1}\cdot 9^p\int_0^1 |f(t)|^p dt+2^{p-1}\int_0^1 |f''(t)|^p dt,$$

因此

$$\int_0^1 |f'(t)|^p dt\leqslant K_p\int_0^1 |f''(t)|^p dt+K_p\int_0^1 |f(t)|^p dt,$$

其中 $K_p=2^{p-1}\cdot 9^p$. 对任意有限区间(a, b), 作变量替换得

$$\int_a^b |f'(t)|^p dt\leqslant K_p(b-a)^p\int_a^b |f''(t)|^p dt$$

$$+K_p(b-a)^{-p}\int_a^b |f(t)|^p dt. \tag{2}$$

因为 $0<\varepsilon\leqslant 1$，所以存在正整数 n 使

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{1/p}\leqslant 1/n\leqslant\varepsilon^{1/p}.$$

对 $j=0,1,\cdots,n$，令 $a_j=a+(b-a)j/n$. 注意到 $a_j-a_{j-1}=(b-a)/n$，由(2)我们得

$$\begin{aligned}\int_a^b|f'(t)|^p dt&=\sum_{j=1}^{n}\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f'(t)|^p dt\\&\leqslant K_p\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{b-a}{n}\right)^p\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f''(t)|^p dt\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{n}{b-a}\right)^p\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f(t)|^p dt\right\}\\&\leqslant\widetilde{K}(p,b-a)\left\{\varepsilon\int_a^b|f''(t)|^p dt\right.\\&\qquad\left.+\varepsilon^{-1}\int_a^b|f(t)|^p dt\right\},\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $\widetilde{K}(p,b-a)=K_p\max[(b-a)^p,2^p(b-a)^{-p}]$.

现设

$$K(1,p,b-a)=\begin{cases}\max\limits_{1\leqslant s\leqslant 2}\widetilde{K}(p,s) & \text{如果}\quad b-a\geqslant 1\\ \max\limits_{b-a\leqslant s\leqslant 2}\widetilde{K}(p,s) & \text{如果}\quad 0<b-a<1\end{cases}$$

则对 $0<b-a\leqslant\infty$，$K(1,p,b-a)$ 有限并且连续依赖于 $b-a$. 对 $b-a<1$，(1)直接由(3)得出. 对 $1\leqslant b-a\leqslant\infty$，区间 (a,b) 可以分成(可能是无穷多个)子区间，每个子区间的长度在 1 和 2 之间，从而把(3)用于每一个子区间，求和得(1).

最后，设 $b-a=\infty$. 作为典型我们假定 a 为有限和 $b=\infty$ 其余的情形是类似的. 对给定的 $\varepsilon>0$，设 $a_j=a+j\varepsilon^{1/p}$，$j=0,1,2,\cdots$. 则 $a_j-a_{j-1}=\varepsilon^{1/p}$，用(2)式得

$$\int_a^\infty|f'(t)|^p dt=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f'(t)|^p dt$$

$$\leqslant K_p\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f''(t)|^p dt$$

$$+K_p\varepsilon^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f(t)|^p dt,$$

它就是(1)，$K=K_p$ 只依赖于 p. ▌

4.11 对 $1\leqslant p<\infty$ 和对整数 $j, 0\leqslant j\leqslant m$，在 $W^{m,p}(\Omega)$ 上我们引进泛函 $|\cdot|_{j,p}$ 如下：

$$|u|_{j,p}=|u|_{j,p,\Omega}=\left\{\sum_{|\alpha|=j}\int_{\Omega}|D^\alpha u(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

显然，$|u|_{0,p}=\|u\|_{0,p}=\|u\|_p$ 是 u 在 $L^p(\Omega)$ 内的范数并且

$$\|u\|_{m,p}=\left\{\sum_{0\leqslant j\leqslant m}|u|_{j,p}^p\right\}^{1/p}.$$

如果 $j\geqslant1$，$|\cdot|_{j,p}$ 是一个半范数——它有范数的所有性质除了 $|u|_{j,p}=0$ 并不蕴涵 u 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 内等于零；例如，u 可以是一个有限体积的区域 Ω 上的非零常数. 在我们下面研究的某些情形，$|\cdot|_{m,p}$ 对空间 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 是一个等价范数，特别地，当 Ω 为有界时是如此.

现在我们建立形如

$$|u|_{j,p}\leqslant K\varepsilon|u|_{m,p}+K\varepsilon^{-j/(m-j)}|u|_{0,p} \tag{4}$$

的内插不等式，其中 $0\leqslant j\leqslant m-1$. 下面的引理说明一般说来我们只要在特殊情形 $j=1, m=2$ 建立(4)就够了，这一简化在下面的三个内插定理中都要用到.

4.12 引理 设 $0<\delta_0<\infty$，设 $m\geqslant2$，并设

$$\varepsilon_0=\min(\delta_0, \delta_0^2, \cdots, \delta_0^{m-1}).$$

假设对给定的 $p, 1\leqslant p<\infty$，以及对给定的 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$，存在常数 $K=K(\delta_0, p, \Omega)$ 使对所有的有限的 δ，$0<\delta\leqslant\delta_0$，并且对所有的 $u\in W^{2,p}(\Omega)$，我们有

$$|u|_{1,p}\leqslant K\delta|u|_{2,p}+K\delta^{-1}|u|_{0,p}. \tag{5}$$

则存在常数 $K=K(\varepsilon_0, m, p, \Omega)$ 使对所有的有限的 ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, 所有的整数 j, $0\leqslant j\leqslant m-1$, 所有的 $u\in W^{m,p}(\Omega)$, 我们有

$$|u|_{j,p}\leqslant K\varepsilon|u|_{m,p}+K\varepsilon^{-j/(m-j)}|u|_{0,p}. \tag{6}$$

证明 因为对 $j=0$, (6)式是明显的, 我们只考虑 $1\leqslant j\leqslant m-1$ 的情形. 证明通过对 m 和 j 双重归纳完成. 出现在推导中的常数 $K_1, K_2, \cdots$ 可以依赖于 δ_0(或 ε_0), m, p, 和 Ω. 我们首先对 m 归纳证明(6)式 $j=m-1$ 的情形, 这样(5)就是 $m=2$ 的特殊情形. 假定对某个 k, $2\leqslant k\leqslant m-1$,

$$|u|_{k-1,p}\leqslant K_1\delta|u|_{k,p}+K_1\delta^{-(k-1)}|u|_{0,p} \tag{7}$$

对所有的 δ, $0<\delta\leqslant\delta_0$, 和所有的 $u\in W^{k,p}(\Omega)$ 成立, 如果 $u\in W^{k+1,p}(\Omega)$, 我们证明(7)式用 $k+1$ 代替 k 时仍成立(常数 K_1 不同), 如果 $|\alpha|=k-1$, 我们从(5)得

$$|D^\alpha u|_{1,p}\leqslant K_2\delta|D^\alpha u|_{2,p}+K_2\delta^{-1}|D^\alpha u|_{0,p}.$$

把这个不等式与(7)式联立, 对 $0<\eta\leqslant\delta_0$ 我们得

$$\begin{aligned}|u|_{k,p}&\leqslant K_3\sum_{|\alpha|=k-1}|D^\alpha u|_{1,p}\\&\leqslant K_4\delta|u|_{k+1,p}+K_4\delta^{-1}|u|_{k-1,p}\\&\leqslant K_4\delta|u|_{k+1,p}+K_4K_1\delta^{-1}\eta|u|_{k,p}\\&\quad+K_4K_1\delta^{-1}\eta^{1-k}|u|_{0,p}.\end{aligned}$$

不妨假定 $2K_1K_4\geqslant1$. 因此我们可以取 $\eta=\delta/2K_1K_4$, 因此得

$$\begin{aligned}|u|_{k,p}&\leqslant 2K_4\delta|u|_{k+1,p}+(\delta/2K_1K_4)^{-k}|u|_{0,p}\\&\leqslant K_5\delta|u|_{k+1,p}+K_5\delta^{-k}|u|_{0,p}.\end{aligned}$$

这就完成了归纳, 对 $0<\delta\leqslant\delta_0$ 建立了(7)式, 从而对 $j=m-1$ 和 $0<\varepsilon\leqslant\delta_0$ 建立了(6)式.

我们现在对 j 作反向归纳证明:

$$|u|_{j,p}\leqslant K_6\delta^{m-j}|u|_{m,p}+K_6\delta^{-j}|u|_{0,p} \tag{8}$$

对 $1\leqslant j\leqslant m-1$ 和 $0<\delta\leqslant\delta_0$ 成立．注意（7）式当 $k=m$ 是(8)式 $j=m-1$ 的特殊情形．因此假定(8)式对某个 $j(2\leqslant j\leqslant m-1)$ 成立．我们证明它用 $j-1$ 代替 j 时仍成立（常数 K_6 不同）．从(7)和(8)我们得

$$
\begin{aligned}
|u|_{j-1,p}&\leqslant K_7\delta|u|_{j,p}+K_7\delta^{1-j}|u|_{0,p}\\
&\leqslant K_7\delta\{K_6\delta^{m-j}|u|_{m,p}+K_6\delta^{-j}|u|_{0,p}\}+K_7\delta^{1-j}|u|_{0,p}\\
&\leqslant K_8\delta^{m-(j-1)}|u|_{m,p}+K_8\delta^{-(j-1)}|u|_{0,p}.
\end{aligned}
$$

所以(8)式成立，由(8)式中令 $\delta=\varepsilon^{1/(m-j)}$ 并注意到如果 $\delta\leqslant\delta_0$ 则 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 便得到(6)式．∎

4.13　定理　存在常数 $K=K(m,p,n)$ 使对任意的 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$，任意的 $\varepsilon>0$，任意的整数 j，$0\leqslant j\leqslant m-1$，和任意的 $u\in W_0^{m,p}(\Omega)$，

$$
|u|_{j,p}\leqslant K\varepsilon|u|_{m,p}+K\varepsilon^{-j/(m-j)}|u|_{0,p}. \tag{9}
$$

证明　由引理 3.22 在 Ω 外延拓为零的算子是 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 到 $W^{m,p}(\mathbf{R})$ 的等距同态．因此只要对 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 建立(9)式就够了．同样，由引理 4.12 我们只要考虑 $j=1$，$m=2$ 的情形．（$j=0$，$m=1$ 的情形是平凡的.）对任意的 $\varepsilon>0$ 和任意的 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 我们由引理 4.10 得

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)\right|^p dx_j\leqslant K\varepsilon^p\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\phi(x)\right|^p dx_j
+K\varepsilon^{-p}\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(x)|^p dx_j
$$

对 x 的其余分量积分，我们得

$$
\|D_j\phi\|_p^p\leqslant K\varepsilon^p\|D_j^2\phi\|_p^p+K\varepsilon^{-p}\|\phi\|_p^p.
$$

从而

$$
\begin{aligned}
|\phi|_{1,p}^p&\leqslant K\varepsilon^p\sum_{j=1}^n\|D_j^2\phi\|_p^p+nK\varepsilon^{-p}|\phi|_{0,p}^p\\
&\leqslant K\varepsilon^p|\phi|_{2,p}^p+nK\varepsilon^{-p}|\phi|_{0,p}^p.
\end{aligned}
$$

只要取 p 次方根并且注意到$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$在 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 内稠密即可得到

(9)式的 $j=1, m=2$ 的情形. ▌

4.14 定理 (Ehrling[23], Nirenberg[53], Gagliardo[24]) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 具有一致锥性质(4.4 节), 并且设 ε_0 是有限正数, 则存在常数 $K=K(\varepsilon_0, m, p, \Omega)$ 使对任意的 ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, 任意的整数 j, $0\leqslant j\leqslant m-1$, 以及任意的 $u\in W^{m,p}(\Omega)$

$$|u|_{j,p}\leqslant K\varepsilon|u|_{m,p}+K\varepsilon^{-j/(m-j)}|u|_{0,p} \tag{10}$$

证明 $m=1$ 情形是平凡的; 再者由引理 4.12 只要对 $j=1$, $m=2$ 建立(10)式就够了. 此外, 由引理 4.10 证明中第二段所用的讨论我们可以假定 $\varepsilon_0=1$.

在证明中我们始终利用第 4.4 节中描述Ω具有一致锥条件的符号. 如果δ 是该节条件(ii)中的常数并如果 $\lambda=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 是 n 重整数, 我们考虑立方体

$$H_\lambda=\{x\in\mathbf{R}^n: \lambda_k\delta/2\sqrt{n}\leqslant x_k\leqslant(\lambda_k+1)\delta/2\sqrt{n}\},$$

则 $\mathbf{R}^n=\bigcup\limits_\lambda H_\lambda$, 并且 $\operatorname{diam} H_\lambda=\delta/2$. 设 $\Omega_0=\bigcup\limits_{H_\lambda\subset\Omega}H_\lambda$. 于是 $\Omega\sim\Omega_\delta\subset\Omega_0\subset\Omega$. 如果集合 $U_1, U_2, \cdots$和 $Q_1, Q_2\cdots$如第 4.4 节, 则

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^\infty(U_j\cap\Omega)\cup\Omega_0=\bigcup_{j=1}^\infty Q_j\cup\Omega_0$$

我们证明对任意的 $u\in W^{2,p}(\Omega)$

$$|u|^p_{1,p,\Omega_0}\leqslant K_1\varepsilon^p|u|^p_{2,p,\Omega_0}+K_1\varepsilon^{-p}|u|^p_{0,p,\Omega_0} \tag{11}$$

以及对 $j=1, 2, 3, \cdots$

$$|u|^p_{1,p,U_j\cap\Omega}\leqslant K_2\varepsilon^p|u|^p_{2,p,Q_j}+K_2\varepsilon^{-p}|u|^p_{0,p,Q_j}, \tag{12}$$

其中 K_2 与 j 无关. 因为任意 $R+2$ 个集合 Ω_0, Q_1, Q_2, $\cdots$交于空集, (11)和(12)式蕴涵

$$|u|^p_{1,p,\Omega}\leqslant|u|^p_{1,p,\Omega_0}+\sum_{j=1}^\infty|u|^p_{1,p,U_j\cap\Omega}$$

$$\leqslant\max(K_1, K_2)\Big\{\varepsilon^p|u|^p_{2,p,\Omega_0}+\varepsilon^p\sum_{j=1}^\infty|u|^p_{2,p,Q_j}$$

$$+\varepsilon^{-p}|u|_{0,p,\Omega_0}^p+\varepsilon^{-p}\sum_{j=1}^{\infty}|u|_{0,p,\Omega_j}^p\Big\}$$

$$\leqslant(R+1)\max(K_1,K_2)\{\varepsilon^p|u|_{2,p,\Omega}^p+\varepsilon^{-p}|u|_{0,p,\Omega}^p\},$$

取 p 次方根即得(10)式($j=1, m=2$ 情形). 所以剩下要验证(11)和(12).

如果 $u\in C^\infty(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$, 把它看作是从 $\lambda_k\delta/2\sqrt{n}$ 到 $(\lambda_k+1)\delta/2\sqrt{n}$ 区间上的 x_k 的函数, 我们用引理 4.10 于 u, 然后在类似的区间上对其余变量积分, 得到对任意的 $H_\lambda\subset\Omega$

$$\int_{H_\lambda}|D_k u(x)|^p dx\leqslant K_3\varepsilon^p\int_{H_\lambda}|D_k^2 u(x)|^p dx$$

$$+K_3\varepsilon^{-p}\int_{H_\lambda}|u(x)|^p dx, \tag{13}$$

其中 K_3 只依赖于 p 和 H_λ 的边长(也就是通过 δ 和 n 依赖于Ω), 把(13)式对 $1\leqslant k\leqslant n$ 求和, 我们得

$$|u|_{1,p,H_\lambda}^p\leqslant K_3\varepsilon^p|u|_{2,p,H_\lambda}^p+nK_3\varepsilon^{-p}|u|_{0,p,H_\lambda}^p. \tag{14}$$

因为立方体H不重叠, 我们把(14)式对所有的立方体 $H_\lambda\subset\Omega$ 求和得到(11)式, 其中 $K_1=nK_3$. 因为 $C^\infty(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$ 在 $W^{2,p}(\Omega)$ 内稠密, (11)式对所有的 $u\in W^{2,p}(\Omega)$ 成立.

(12)式中的常数只依赖于 p, M和锥 C_j 的大小(见第 4.4节). 预料到这一点, 并且注意到所有锥 C_j 与锥 C 全等, 大小完全由 C 确定, 为了简单起见, 我们在考虑(12)式时去掉所有的下标 j. 设 ξ 是 C 内一个方向的单位向量, 并且设 $\Omega_\xi=\{y+t\xi: y\in\Omega\cap U, 0\leqslant t\leqslant h\}$, 其中 h 是锥 C 的高(图 3), 因此由一致锥性质条件(iii), $(\Omega\cap U)\subset\Omega_\xi\subset Q$. 任一平行于 ξ 的直线 L 或者与 Ω_ξ 不相交或者与 Ω_ξ 交于长为 ρ 的区间, 其中, 由一致锥性质的条件(i), $h\leqslant\rho\leqslant h+\operatorname{diam}U\leqslant h+M$. 由引理 4.10, 如果 $u\in C^\infty(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$,

$$\int_{L\cap\Omega_\xi}|D_\xi u|^p ds\leqslant K_4\varepsilon^p\int_{L\cap\Omega_\xi}|D_\xi^2 u|^p ds$$

$$+K_4\varepsilon^{-p}\int_{L\cap\Omega_\xi}|u|^p ds, \tag{15}$$

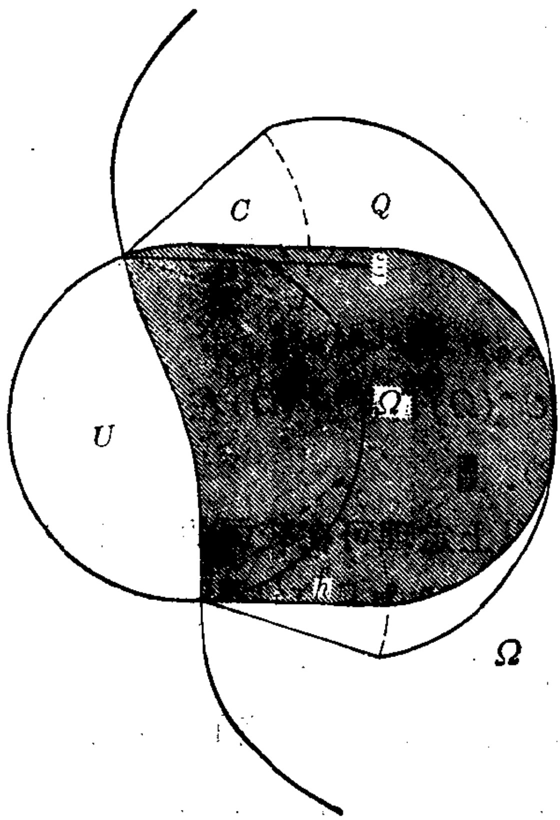


图 3

其中 D_ξ 表示方向 ξ 的微商且 K_4 可以选得只依赖于 p, h 和 M, 即只依赖于 p 和 Ω. 把 Ω_ξ 投影到垂直于 ξ 的超平面上, 在此投影上积分(15)式得

$$\int_{\Omega\cap U}|D_\xi u(x)|^p dx\leqslant\int_{\Omega_\xi}|D_\xi u(x)|^p dx$$

$$\leqslant K_4\,\varepsilon^p\int_{\Omega_\xi}|D_\xi^2 u(x)|^p dx+K_4\varepsilon^{-p}\int_{\Omega_\xi}|u(x)|^p dx$$

$$\leqslant K_4\,\varepsilon^p\int_Q|D_\xi^2 u(x)|^p dx+K_4\varepsilon^{-p}\int_Q|u(x)|^p dx. \tag{16}$$

现在设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 内的单位向量基, 它们每一个的方向包含在锥 C 内. 对于 $1\leqslant k\leqslant n$, $D_k u(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j D_{\xi_j}u(x)$, 其中常数 a_j 满足 $|a_j|\leqslant 1/V$, $1\leqslant j\leqslant n$, V 为 $\xi_1, \cdots\xi_n$ 张成的平行多面体的体积.

(读者可以证实这一断言，它是线代数的简单练习.) V 的下界可以由锥 C 的立体角所确定——也就是说，$\xi_1, \cdots, \xi_n$ 随着覆盖的小块 U 变化，总可以选得使 V 与 U 无关. 由(16)式得

$$\int_{\Omega\cap U}|D_k u(x)|^p dx \leqslant K_5 \sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega\cap U}|D_{\xi_j}u(x)|^p dx$$

$$\leqslant K_5 \sum_{j=1}^{n}\left\{K_4\varepsilon^p \int_Q |D_{\xi_j}^2 u(x)|^p dx + K_4\varepsilon^{-p}\int_Q |u(x)|^p dx\right\}$$

$$\leqslant K_6\varepsilon^p |u|_{2,p,Q}^p + K_6\varepsilon^{-p}|u|_{0,p,Q}^p.$$

对 k 求和并利用 $C^\infty(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$ 在 $W^{2,p}(\Omega)$ 内的稠密性即得所要的不等式(12). ▌

如果 Ω 有界，以上定理可在较弱的假定下证明

4.15 定理 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 内具有锥性质的有界区域，则定理 4.14 的结论对 Ω 成立.

证明 由定理 4.8 存在 Ω 的开子集的有限集族 $\{\Omega_1, \cdots, \Omega_k\}$ 使 $\Omega = \bigcup_{j=1}^{k}\Omega_j$ 并使每一个 Ω_j 是某一个开平行多面体的平移的并集. 显然只要对每个 Ω_j 证明类似于(11) 的不等式就够了. 所以不失一般性我们假定 $\Omega = \bigcup_{x\in A}(x+P)$，其中 A 是 $\mathbf{R}^n$ 内的有界集，P 是一个有一个顶点在原点的开平行多面体，设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是从原点出发的 P 的 n 条边方向上的单位向量，并且设 l 是这些边的最小长度，则平行于一个向量 ξ_j 的任何直线 L 与 Ω 的交集或者是空集或者是线段的有限集族，每一线段长度介于 l 和 $\operatorname{diam}\Omega$ 之间. 如同(16)式一样由此得到对光滑函数 u

$$\int_\Omega |D_{\xi_j}u(x)|^p dx \leqslant K_1\varepsilon^p \int_\Omega |D_{\xi_j}^2 u(x)|^p dx + K\varepsilon^{-p}\int_\Omega |u(x)|^p dx.$$

因为 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 内的一组基，类似于(16)式后面的论证，现在就能证明，对所有 $u \in W^{2,p}(\Omega)$

$$|u|^p_{1,p,\Omega}\leqslant K_2\varepsilon^p|u|^p_{2,p,\Omega}+K_2\varepsilon^{-p}|u|^p_{0,p,\Omega}$$

成立. ▌

4.16 推论 在下列空间上:

(i) $W^{m,p}_0(\Omega)$对任意区域 Ω,

(ii) $W^{m,p}(\Omega)$对任意具有一致锥性质的区域 Ω,

(iii) $W^{m,p}(\Omega)$对任意具有锥性质的有界区域 Ω,

由

$$((u))_{m,p,\Omega}=\{|u|^p_{m,p,\Omega}+|u|^p_{0,p,\Omega}\}^{1/p}$$

定义的泛函$((\cdot))_{m,p,\Omega}$是等价于通常范数$\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$的一个范数.

4.17 定理 (Ehrling[23], Browder[12]) 如果 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 具有一致锥性质或者如果它有界且具有锥性质, 并且如果 $1\leqslant p<\infty$, 则存在常数 $K=K(m,p,\Omega)$ 使对 $0\leqslant j\leqslant m$ 和任意的 $u\in W^{m,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{j,p}\leqslant K\|u\|^{j/m}_{m,p}\|u\|^{(m-j)/m}_{0,p}. \tag{17}$$

此外, (17)式对所有的 $u\in W^{m,p}_0(\Omega)$ 成立, 常数 $K=K(m,p,n)$ 与 Ω无关.

证明 不等式(17)对 $j=0$ 或 $j=m$ 是显然的. 对 $0<j<m$, 我们接连地应用(10)式得

$$\|u\|_{j,p}\leqslant K_1\varepsilon\|u\|_{m,p}+K_1\varepsilon^{-j/(m-j)}\|u\|_{0,p} \tag{18}$$

对于所有 ε, $0<\varepsilon\leqslant 1$, 以及所有 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 成立, K_1 只依赖于 m, p, 和 Ω. (由定理 4.13, 同样的不等式对所有 $u\in W^{m,p}_0(\Omega)$ 成立, K_1 只依赖于 m, p 和 n) 如果我们在(18)中令

$$\varepsilon=(\|u\|_{0,p}/\|u\|_{m,p})^{(m-j)/m}$$

就对 $u\neq 0$ 得到了不等式(17). ▌

我们注意(17)式同样代数地蕴涵(18)式: 特别地, 在第二章不等式(4)

$$ab\leqslant(a^p/p)+(b^{p'}/p'),\ (1/p)+(1/p')=1$$

中, 令 $p=m/j$, $p'=m/(m-j)$, $a=(\varepsilon\|u\|_{m,p})^{j/m}$ 和

$b=\varepsilon^{-j/m}\|u\|_{0,p}^{(m-j)/m}$，就可以看出 (17) 式的右端不超过 (18) 式的右端.

包含紧子区域的内插不等式

4.18 函数 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 的中间导数 $D^\beta u(|\beta|\leqslant m-1)$ 的 $L^p(\Omega)$-范数的上界可以由半范数 $|u|_{m,p,\Omega}$ 和 u 在一个适当的子区域上的 L^p-范数表示出来，这个子区域的闭包是有界区域 Ω 的紧子集. 我们建立某些这一类的混合内插不等式，方法与上面推导内插不等式的思路一致. (例如参看 Agmon 的工作[6].)

4.19 引理 设 (a, b) 是 $\mathbb{R}$ 上的有限开区间并且设 $1\leqslant p<\infty$. 则存在有限常数 $K=K(p, b-a)$，并且对所有的正数 ε，存在数 $\delta=\delta(\varepsilon, b-a)$ 满足 $0<2\delta<b-a$，使所有的 (a, b) 上的连续可微函数 f 满足

$$\int_a^b|f(t)|^p dt\leqslant K\varepsilon\int_a^b|f'(t)|^p dt+K\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(t)|^p dt. \tag{19}$$

此外，可以选与 $b-a$ 无关的 K 和 δ 的固定值使 (19) 式对所有的区间 (a, b) 都成立，只要区间的长度在两个固定的正的界之间：$0<l_1\leqslant b-a\leqslant l_2<\infty$.

证明 证明与引理 4.10 类似，暂时假设 $a=0$ 和 $b=1$，并且令 $\frac{1}{3}<\eta<\frac{2}{3}$. 如果 $0<x<1$，则

$$|f(x)|=\left|f(\eta)+\int_\eta^x f'(t)dt\right|\leqslant|f(\eta)|+\int_0^1|f'(t)|dt$$

在 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 上对 η 积分，导致

$$|f(x)|\leqslant 3\int_{1/3}^{2/3}|f(\eta)|d\eta+\int_0^1|f'(t)|dt,$$

由 Hölder 不等式如果 $p>1$，

$$|f(x)|^p \leqslant 3\cdot 2^{p-1}\int_{1/3}^{2/3}|f(t)|^p dt + 2^{p-1}\int_0^1 |f'(t)|^p dt.$$

在(0, 1)上对 x 积分，我们得

$$\int_0^1 |f(x)|^p dt \leqslant K_p\int_0^1 |f'(t)|^p dt + K_p\int_{1/3}^{2/3}|f(t)|^p dt,$$

其中 $K_p=3\cdot 2^{p-1}$. 作变量替换 $a+t(b-a)\to t$ 得到在任意的有限区间(a, b)上，

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \leqslant K_p(b-a)^p\int_a^b |f'(t)|^p dt$$

$$+K_p\int_{a+(b-a)/3}^{b-(b-a)/3}|f(t)|^p dt.$$

对于给定的 $\varepsilon>0$ 取正整数 n 使 $n^{-p}\leqslant\varepsilon$. 对于 $j=0, 1, \cdots, n$ 设 $a_j=a+(b-a)j/n$, 并且取 δ 使 $0<\delta\leqslant(b-a)/3n$. 则

$$\int_a^b |f(t)|^p dt = \sum_{j=1}^{n}\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f(t)|^p dt$$

$$\leqslant K_p\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{b-a}{n}\right)^p\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f'(t)|^p dt + \int_{a_{j-1}+\delta}^{a_j-\delta}|f(t)|^p dt\right\}$$

$$\leqslant K_p\max(1, (b-a)^p)\left\{\varepsilon\int_a^b |f'(t)|^p dt + \int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(t)|^p dt\right\}$$

这就是所要的不等式. ▌

读者可以确信，与引理 4.10 不同，如果(a, b)是无限区间，(19)式右端第二个积分在紧子区间上取，那末引理 4.19 是不能推广到这种情形的.

4.20 定理 设Ω是 $\mathbf{R}^n$ 内具有线段性质的有界区域，则存在常数 $K=K(p, \Omega)$使得对任意的正数 ε，对应于一个区域 $\Omega_\varepsilon\subset\subset\Omega$ 使

$$|u|_{0,p,\Omega}\leqslant K\varepsilon|u|_{1,p,\Omega}+K|u|_{0,p,\Omega_\varepsilon} \tag{20}$$

对所有的 $u\in W^{1,p}(\Omega)$ 成立.

证明 证明与定理 4.14 类似. 因为Ω有界，bdryΩ 的局部有限

开覆盖 $\{U_j\}$ 和线段性质叙述中有关的非零向量构成的对应集合 $\{y_j\}$(第 4.2 节) 都是有限集合. 所以可以找到开集 $\mathscr{V}_j\subset\subset U_j$ 使 $\mathrm{bdry}\Omega\subset\bigcup_j \mathscr{V}_j$. (见定理 3.14 证明的第一部分.)不仅如此, 对某个 $\delta>0$, $\Omega_\delta=\{x\in\Omega:\ \mathrm{dist}(x,\ \mathrm{bdry}\Omega)<\delta\}\subset\bigcup_j \mathscr{V}_j$. 所以我们可以写 $\Omega=\bigcup_j(\mathscr{V}_j\cap\Omega)\cup\widetilde{\Omega}$, 其中 $\widetilde{\Omega}\subset\subset\Omega$. 所以只要证明对每一个 j

$$|u|^p_{0,p,\mathscr{V}_j\cap\Omega}\leqslant K_1\varepsilon^p|u|^p_{1,p,\Omega}+K_1|u|^p_{0,p,\Omega_{\varepsilon,j}}$$

对某个 $\Omega_{\varepsilon,j}\subset\subset\Omega$ 成立就够了, 为了简单起见我们去掉所有的下标 j.

考虑集合 Q, Q_η, $0\leqslant\eta<1$, 其定义为

$$Q=\{x+ty:\ x\in U\cap\Omega,\ 0<t<1\},$$
$$Q_\eta=\{x+ty:\ x\in\mathscr{V}\cap\Omega,\ \eta<t<1\}.$$

如果 $\eta>0$, $Q_\eta\subset\subset Q$. 由线段性质, $Q\subset\Omega$ 并且任意的平行于 y 过 $\mathscr{V}\cap\Omega$ 上一点的直线 L 与 Q_0 交于一个或几个区间, 每个区间的长度在 $|y|$ 与 $\mathrm{diam}\Omega$ 之间. 由引理 4.19 存在 $\eta>0$ 和常数 K 使对任意的 $u\in C^\infty(\Omega)$ 和任意的这样的直线 L

$$\int_{L\cap Q_0}|u(x)|^p ds\leqslant K_1\varepsilon^p\int_{L\cap Q_0}|D_y u(x)|^p ds + K_1\int_{L\cap Q_\eta}|u(x)|^p ds,$$

D_y 表示在 y 的方向求导数. 我们把 Q_0 投影在垂直于 y 的超平面上, 在此投影上积分这个不等式, 从而得

$$\begin{aligned}|u|^p_{0,p,\Omega\cap\mathscr{V}}\leqslant|u|^p_{0,p,Q_0}&\leqslant K_1\varepsilon^p|u|^p_{1,p,Q_0}+K_1|u|^p_{0,p,Q_\eta}\\&\leqslant K_1\varepsilon^p|u|^p_{1,p,\Omega}+K_1|u|^p_{0,p,\Omega_\varepsilon},\end{aligned}$$

其中 $\Omega_\varepsilon=\Omega_\eta\subset\subset\Omega$. 由稠密性, 这个不等式对任意的 $u\in W^{1,p}(\Omega)$ 都成立. ▌

4.21 推论 如果Ω是有界的且具有锥性质，定理 4.20 的结论也成立.

证明 如前所示，具有锥性质的区域Ω不一定具有线段性质. 但是由定理 4.8，Ω是具有强局部 Lipschitz 性质的区域的有限并. 我们把具有强局部 Lipschitz 性质的有界区域具有线段性质的证明留给读者，这样就完成了证明. ▌

4.22 引理 设 Ω_0, Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 内的区域，$\Omega_0 \subset\subset \Omega$. 则存在一个具有锥性质的区域 Ω' 使 $\Omega_0 \subset \Omega' \subset\subset \Omega$.

证明 因为$\overline{\Omega}_0$是Ω的紧子集，存在 $\delta>0$ 使 $\operatorname{dist}(\overline{\Omega}_0, \operatorname{bdry}\Omega)>\delta$. 区域 $\Omega'=\{y\in\mathbf{R}^n$：对某一个 $x\in\Omega_0$，$|y-x|<\delta\}$显然有所要的性质. ▌

4.23 定理 设Ω是 $\mathbf{R}^n$ 内有界区域或者具有线段性质或者具有锥性质，设 $0<\varepsilon_0<\infty$，设 $1\leqslant p<\infty$，并且设 j 和 m 为满足 $0\leqslant j\leqslant m-1$ 的整数. 则存在常数 $K=K(\varepsilon_0, m, p, \Omega)$，对每一个 ε，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，存在一个区域 Ω_ε，$\Omega_\varepsilon\subset\subset\Omega$，使得对所有的 $u\in W^{m,p}(\Omega)$

$$|u|_{j,p,\Omega}\leqslant K\varepsilon|u|_{m,p,\Omega}+K\varepsilon^{-j/(m-j)}|u|_{0,p,\Omega_\varepsilon}. \tag{21}$$

证明 我们把定理 4.20 或者它的推论用于 $D^\beta u$，$|\beta|=m-1$，得

$$|u|_{m-1,p,\Omega}\leqslant K_1\varepsilon|u|_{m,p,\Omega}+K_1|u|_{m-1,p,\Omega_\varepsilon}, \tag{22}$$

其中 $\Omega_\varepsilon\subset\subset\Omega$. 由引理 4.22 我们可以假定 Ω_ε 有锥性质. 对于 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，由定理 4.15 我们有

$$|u|_{m-1,p,\Omega_\varepsilon}\leqslant K_2\varepsilon|u|_{m,p,\Omega_\varepsilon}+K_2\varepsilon^{-(m-1)}|u|_{0,p,\Omega_\varepsilon}. \tag{23}$$

把(22)(23)联立起来，我们得(21)式的 $j=m-1$ 情形. 我们用对 j 向下归纳来完成证明. 假定 (21) 对某个 $j\geqslant1$ 成立，把 ε 换成 ε^{m-j}(随之而来K和 Ω_ε 也作替换)，我们得

$$|u|_{j,p,\Omega}\leqslant K_3\varepsilon^{m-j}|u|_{m,p,\Omega}+K_3\varepsilon^{-j}|u|_{0,p,\Omega'_\varepsilon}. \tag{24}$$

同样由(21) 式把 j 和m分别换成 $j-1$ 和 j(这个情形已经证明)，我们有

$$|u|_{j-1,p,\Omega} \leqslant K_4\varepsilon|u|_{j,p,\Omega}+K_4\varepsilon^{-(j-1)}|u|_{0,p,\Omega''_\varepsilon}. \qquad (25)$$

把(24)和(25)联立起来，我们得

$$|u|_{j-1,p,\Omega} \leqslant K_5\varepsilon^{m-(j-1)}|u|_{m,p,\Omega}+K_5\varepsilon^{-(j-1)}|u|_{0,p,\Omega_\varepsilon},$$

其中 $K_5=K_4(K_3+1)$ 和 $\Omega_\varepsilon=\Omega'_\varepsilon\cup\Omega''_\varepsilon$. 把 ε 换成 $\varepsilon^{1/(m-j+1)}$，我们便完成了归纳. ∎

延 拓 定 理

4.24 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域. 对于给定的 m 和 p，将 $W^{m,p}(\Omega)$ 映入 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 的线性算子 E 称为 Ω 的简单 (m,p)-延拓算子，如果存在常数 $K=K(m,p)$ 使对所有的 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，以下条件成立:

(i) 在 Ω 上 $Eu(x)=u(x)$ a. e.,

(ii) $\|Eu\|_{m,p,\mathbf{R}^n}\leqslant K\|u\|_{m,p,\Omega}$.

E 称为 Ω 的强 m-延拓算子，如果 E 是把 Ω 上 a. e. 定义的函数映入 $\mathbf{R}^n$ 上 a. e. 定义的函数的线性算子并且如果对所有的 p, $1\leqslant p<\infty$，所有的 k, $0\leqslant k\leqslant m$, E 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 上的限制是一个 Ω 的简单 (k,p)-延拓算子. 最后，E 称为 Ω 的全延拓算子，如果对所有的 m, E 都是 Ω 的强 m-延拓算子.

4.25 对于一个区域 Ω 即使一个简单 (m,p)-延拓算子的存在，也保证 $W^{m,p}(\Omega)$ 继承到很多 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 所具有的性质. 例如，如果已知嵌入 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)\to L^q(\mathbf{R}^n)$ 成立，则按照以下的不等式串可以得到嵌入 $W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$:

$$\|u\|_{0,q,\Omega}\leqslant\|Eu\|_{0,q,\mathbf{R}^n}\leqslant K_1\|Eu\|_{m,p,\mathbf{R}^n}\leqslant K_1K\|u\|_{m,p,\Omega}.$$

但是在第五章我们将不用这个方法证明 Sobolev 嵌入定理，因为我们将在比存在一个 (m,p)-延拓算子所需的假设更为弱的关于 Ω 的假设下来证明 Sobolev 定理.

我们将对以上定义的三种类型的每一个构造延拓算子，这些构造方法中有两个是基于对光滑边界的逐次反射，它属于 Lichen-

stein[35]和较后的 Hestenes[31]与 Seeley[61]. 第三个构造法属于 Calderón[14], 包括使用关于奇异积分的 Calderón-Zygmund 定理. 它不如反射法明晰, 得到的结果也弱些, 但对区域Ω的正则性要求少一些. 除了特别简单的区域外, 所有的构造都要求以这种方式选择的从属于 bdryΩ 的开覆盖的单位分解: 即使得单位分解中的函数有一致有界的导数. 因为这样, 有界边界的区域(外区域和有界区域)看来更容易满足我们的延拓定理的条件, 例外是半空间, 四分之一空间, 等等, 以及它们的光滑的像.

4.26 定理 设Ω或者是

(i) $\mathbf{R}^n$ 内半空间, 或者是

(ii) $\mathbf{R}^n$ 内具有一致 C^m-正则性的区域, 并且还有有界的边界.

对任意的正数m存在Ω的强 m-延拓算子 E. 此外, 如果α和γ是多重指标, $|\gamma|\leqslant|\alpha|\leqslant m$, 存在线性算子 $E_{\alpha\gamma}$, 对于$1\leqslant j\leqslant m-|\alpha|$, 这个算子从$W^{j,p}(\Omega)$到$W^{j,p}(\mathbf{R}^n)$是连续的, 使得如果$u\in W^{|\alpha|,p}(\Omega)$, 则

$$D^\alpha Eu(x)=\sum_{|\gamma|\leqslant|\alpha|}E_{\alpha\gamma}D^\gamma u(x)\qquad \text{a. e. 在 } \mathbf{R}^n. \tag{26}$$

证明 首先设Ω是半空间 $\mathbf{R}^n_+=\{x\in\mathbf{R}^n: x_n>0\}$. 对于 a. e. 定义在$\mathbf{R}^n_+$上的函数 u, 我们定义 a. e. 在 $\mathbf{R}^n$ 的延拓算子 Eu 和 $E_\alpha u$, $|\alpha|\leqslant m$, 如下:

$$\begin{gathered}
Eu(x)=\begin{cases}u(x) & x_n>0\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j u(x_1,\cdots,x_{n-1},-jx_n) & \text{如果 } x_n\leqslant 0,\end{cases}\\
E_\alpha u(x)=\begin{cases}u(x) & \text{如果 } x_n>0\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m+1}(-j)^{\alpha_n}\lambda_j u(x_1,\cdots,x_{n-1},-jx_n) & \text{如果 } x_n\leqslant 0,\end{cases}
\end{gathered}\tag{27}$$

其中系数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{m+1}$ 是 $(m+1)\times(m+1)$ 线性方程组

$$\sum_{j=1}^{m+1}(-j)^k\lambda_j=1,\ \ k=0,1,\cdots,m.$$

的唯一解. 如果 $u\in C^m(\overline{\mathbf{R}^n_+})$，则容易验证 $Eu\in C^m(\mathbf{R}^n)$ 并且

$$D^\alpha Eu(x)=E_\alpha D^\alpha u(x),\ \ |\alpha|\leqslant m.$$

因此

$$\int_{\mathbf{R}^n}|D^\alpha Eu(x)|^p dx=\int_{\mathbf{R}^n_+}|D^\alpha u(x)|^p dx$$

$$+\int_{\mathbf{R}^n_-}\left|\sum_{j=1}^{m+1}(-j)^{\alpha_n}\lambda_j D^\alpha u(x_1,\cdots,x_{n-1},-jx_n)\right|^p dx$$

$$\leqslant K(m,p,\alpha)\int_{\mathbf{R}^n_+}|D^\alpha u(x)|^p dx.$$

通过定理 3.18，把以上不等式推广到函数 $u\in W^{k,p}(\mathbf{R}^n_+)$，$m\geqslant k\geqslant|\alpha|$. 因此 E 是 $\mathbf{R}^n_+$ 的强 m-延拓算子. 因为 $D^\beta E_\alpha u(x)=E_{\alpha+\beta}D^\beta u(x)$，类似的计算表明 E_α 是一个强 $(m-|\alpha|)$-延拓. 这样，定理已对半空间证明了（这里 $E_{\alpha\alpha}=E_\alpha$，当 $\alpha\neq\gamma$ 时 $E_{\alpha\gamma}=0$）.

现在假设 Ω 是一致 C^m-正则的并且有有界边界. 则参照第4.6节，bdryΩ 的开覆盖 $\{U_j\}$，对应的从 U_j 到 B 上的 m-光滑映射 Φ_j 都是有限集族，譬如 $1\leqslant j\leqslant N$. 设 $Q=\left\{y\in\mathbf{R}^n: |y'|=\left(\sum_{j=1}^{n-1}y_j^2\right)^{1/2}<\frac{1}{2}, |y_n|<\sqrt{3}/2\right\}$. 则

$$\left\{y\in\mathbf{R}^n: |y|<\frac{1}{2}\right\}\subset Q\subset B=\{y\in\mathbf{R}^n: |y|<1\}.$$

由第 4.6 节的条件 (i)，对于某个 $\delta>0$，开集 $\mathscr{V}_j=\Psi_j(Q)$，$1\leqslant j\leqslant N$，形成了 $\Omega_\delta=\{x\in\Omega: \operatorname{dist}(x,\operatorname{bdry}\Omega)<\delta\}$ 的一个开覆盖. 存在与 bdryΩ 分开的 Ω 的开集 $\mathscr{V}_0$，使 $\Omega\subset\bigcup_{j=0}^{N}\mathscr{V}_j$. 由定理 3.14 可以找到无限次可微函数 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_N$ 使 $\operatorname{supp}\omega_j\subset\mathscr{V}_j$ 并且对所有

的 $x\in\Omega$，$\sum_{j=0}^{N}\omega_j(x)=1$.（注意如果$\Omega$无界，$\operatorname{supp}\omega_0$ 不必是紧的.）

因为Ω是一致 C^m-正则的，它有线段性质并且 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 内的函数在Ω上的限制是在 $W^{k,p}(\Omega)$ 内稠密的. 如果 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 则 ϕ 在 Ω 上与函数 $\sum_{j=0}^{N}\phi_j$ 一致，其中 $\phi_j=\omega_j\cdot\phi\in C_0^\infty(\mathscr{V}_j)$.

对于 $j\geqslant1$ 和 $y\in B$ 设 $\psi_j(y)=\phi_j(\boldsymbol{\Psi}_j(y))$ 则 $\psi_j\in C_0^\infty(Q)$. 我们在 Q 外部延拓 ψ_j 恒等于零. 如同(27) 一样定义 E(和 E_α)，我们有 $E\psi_j\in C_0^m(Q)$，在 $Q_+=\{y\in Q: y_n>0\}$ 上有 $E\psi_j=\psi_j$，并且

$$\|E\psi_j\|_{k,p,Q}\leqslant K_1\|\psi_j\|_{k,p,Q_+},\quad 0\leqslant k\leqslant m,$$

其中K_1依赖于k, m, 和 p. 如果 $\theta_j(x)=E\psi_j(\boldsymbol{\Phi}_j(x))$，则 $\theta_j\in C_0^m(\mathscr{V}_j)$ 并且如果 $x\in\Omega$ 则 $\theta_j(x)=\phi_j(x)$. 可以归纳地验证，如果 $|\alpha|\leqslant m$，则

$$D^\alpha\theta_j(x)=\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\sum_{|\gamma|\leqslant|\alpha|}a_{j;\alpha\beta}(x)[E_\beta(b_{j;\beta\gamma}\cdot(D^\gamma\phi_j\circ\boldsymbol{\Psi}_j))](\boldsymbol{\Phi}_j(x)),$$

其中 $a_{j;\alpha\beta}\in C^{m-|\alpha|}(\bar{U}_j)$ 和 $b_{j;\beta\gamma}\in C^{m-|\beta|}(\bar{B})$ 依赖于变换 $\boldsymbol{\Phi}_j$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_j=\boldsymbol{\Phi}_j^{-1}$ 并且满足

$$\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}a_{j;\alpha\beta}(x)b_{j;\beta\gamma}(\boldsymbol{\Phi}_j(x))=\begin{cases}1 & \text{如果 } \gamma=\alpha\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$$

由定理 3.35 对 $k\leqslant m$ 我们有，

$$\|\theta_j\|_{k,p,\mathbf{R}^n}\leqslant K_2\|E\psi_j\|_{k,p,Q}\leqslant K_1K_2\|\psi_j\|_{k,p,Q_+}\leqslant K_3\|\phi_j\|_{k,p,\Omega},$$

其中 K_3 可以选得与 j 无关. 算子 $\widetilde{E}$ 定义为

$$\widetilde{E}\phi(x)=\phi_0(x)+\sum_{j=1}^{N}\theta_j(x),$$

如果 $x\in\Omega$ 显然满足 $\widetilde{E}\phi(x)=\phi(x)$，并且

$$\|\widetilde{E}\phi\|_{k,p,\mathbf{R}^n}\leqslant\|\phi_0\|_{k,p,\Omega}+K_3\sum_{j=1}^{N}\|\phi_j\|_{k,p,\Omega}$$

$$\leqslant K_4(1+NK_3)\|\phi\|_{k,p,\Omega} \tag{28}$$

其中

$$K_4=\max_{0\leqslant j\leqslant N}\ \max_{|\alpha|\leqslant m}\ \sup_{x\in R^n}\ |D^\alpha\omega_j(x)|<\infty.$$

这样 $\widetilde{E}$ 是 Ω 的强 m-延拓算子，同样

$$D^\alpha\widetilde{E}\phi(x)=\sum_{|\gamma|\leqslant|\alpha|}(E_{\alpha\gamma}D^\gamma\phi)(x),$$

其中如果 $\alpha\neq\gamma$

$$E_{\alpha\gamma}v(x)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}a_{j;\alpha\beta}(x)[E_\beta(b_{j;\beta\gamma}\cdot(v\cdot\omega_j)\circ\Psi_j)](\Phi_j(x)),$$

并且

$$E_{\alpha\alpha}v(x)=(v\cdot\omega_0)(x)+\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}a_{j;\alpha\beta}(x)[E_\beta(b_{j;\beta\alpha}\cdot(v\cdot\omega_j)\circ\Psi_j)](\Phi_j(x)).$$

我们注意如果 $x\in\Omega$，对于 $\alpha\neq\gamma$，$E_{\alpha\gamma}v(x)=0$ 和 $E_{\alpha\alpha}v(x)=v(x)$. 显然 $E_{\alpha\gamma}$ 是线性算子. 由 $a_{j;\alpha\beta}$ 和 $b_{j;\beta\gamma}$ 的可微性，对 $1\leqslant j\leqslant m-|\alpha|$，从 $W^{j,p}(\Omega)$ 到 $W^{j,p}(\mathbf{R}^n)$，$E_{\alpha\gamma}$ 是连续的，这就完成了证明.▌

以上定理包含了延拓函数的导数的表示式(26)，因为在第七章我们研究分数次空间时要用到它.

以上证明中的反射法可以用来得到对具有强局部 Lipschitz 性质的区域的全延拓算子（参看 Stein [64a]）. 我们给出一个属于 Seeley[61]的对于光滑有界区域的推导.

4.27 引理 存在实序列 $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ 使对所有的非负整数 n 我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{nk}a_k=(-1)^n \tag{29}$$

和

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{nk} |a_k| < \infty. \tag{30}$$

证明 对固定的 N, 设 $a_{k,N}, k=0,1,2,\cdots,N$, 是线性方程组

$$\sum_{k=0}^{N} 2^{nk} a_{k,N} = (-1)^n, \quad n=0,1,2,\cdots,N \tag{31}$$

的解. 依据范得蒙(Vandermonde)行列式

$$V(x_0, x_1, \cdots x_N) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_N \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^N & x_1^N & \cdots & x_N^N \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{N} (x_j - x_i)$$

由克莱姆(Cramer)法则给出(31)的解是

$$\begin{aligned} a_{k,N} &= \frac{V(1,2,\cdots,2^{k-1}, -1, 2^{k+1}, \cdots, 2^N)}{V(1,2,\cdots,2^N).} \\ &= \left\{ \prod_{\substack{i,j=0 \\ i,j\neq k \\ i<j}}^{N} (2^j - 2^i) \prod_{i=0}^{k-1} (-1-2^i) \prod_{j=k+1}^{N} (2^j+1) \right\} \\ &\quad \times \left\{ \prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{N} (2^j - 2^i) \right\}^{-1} \\ &= A_k B_{k,N}, \end{aligned}$$

其中

$$A_k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1+2^i}{2^i - 2^k}, \qquad B_{k,N} = \prod_{j=k+1}^{N} \frac{1+2^j}{2^j - 2^k},$$

如果 $l > m$ 应理解为 $\prod_{i=l}^{m} p_i = 1$. 现在

$$|A_k| \leqslant \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2^{i+1}}{2^{k-1}} = 2^{(3k-k^2)/2}.$$

同样

$$\log B_{k,N}=\sum_{j=k+1}^{N}\log\left(1+\frac{1+2^k}{2^j-2^k}\right)$$

$$<\sum_{j=k+1}^{N}\frac{1+2^k}{2^j-2^k}<(1+2^k)\sum_{j=k+1}^{N}\frac{1}{2^{j-1}}<4,$$

其中我们用了对于$x>0$成立的不等式 $\log(1+x)<x$. 因此增序列$\{B_{k,N}\}_{N=0}^{\infty}$收敛于极限$B_k\leqslant e^4$, 设$a_k=A_kB_k$ 则

$$|a_k|\leqslant e^4 2^{(3k-k^2)/2}.$$

则对任意的n

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{nk}|a_k|\leqslant e^4\sum_{k=0}^{\infty}2^{(2nk+3k-k^2)/2}<\infty.$$

在(31)式中令N趋于无穷,我们便完成了证明.▌

4.28 定理 设Ω或者是

(i) $\mathbf{R}^n$ 内的半空间,或者是

(ii) $\mathbf{R}^n$ 内的区域,它对所有的m具有一致C^m-正则性, 且有有界边界.

则对Ω存在全延拓算子.

证明 只要对半空间 $\mathbf{R}^n_+$ 证明定理就够了;对满足(ii)的Ω的证明如同定理 4.26 那样立即可得.

对于任意的m和p,函数$\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$在$\mathbf{R}^n_+$的限制在$W^{m,p}(\mathbf{R}^n_+)$内稠密,我们只对这样的函数定义延拓算子. 设$f$是实值函数,在$[0,\infty)$无穷次可微, 当$0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$, $f(t)=1$,当$t\geqslant 1$, $f(t)=0$. 如果$\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,设

$$E\phi(x)=\begin{cases}\phi(x) & \text{当 } x\in\overline{\mathbf{R}^n_+}\\ \sum_{k=0}^{\infty}a_kf(-2^kx_n)\phi(x',-2^kx_n), & \text{当 } x\in\mathbf{R}^n_-,\end{cases}\tag{32}$$

其中$\{a_k\}$是上面引理所作的序列, $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$. 则因为对任

意特定的 $x\in\mathbf{R}^n_-=\{x\in\mathbf{R}^n: x_n<0\}$，(32)中的和号只有有限多个非零项. 显然 $E\phi$ 在 $\mathbf{R}^n$ 是有明确定义的. 不仅如此，$E\phi$ 有紧支集并且属于 $C^\infty(\overline{\mathbf{R}}^n_+)\cap C^\infty(\overline{\mathbf{R}}^n_-)$. 如果 $x\in\mathbf{R}^n_-$，我们有

$$
\begin{aligned}
D^\alpha E\phi(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{j=0}^{\alpha_n}\left\{\binom{\alpha_n}{j}(-2^k)^{\alpha_n}f^{(\alpha_n-j)}(-2^kx_n)\right.\\
&\qquad\left.\times D_n^jD^{\alpha'}\phi(x',-2^kx_n)\right\}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(x).
\end{aligned}
$$

因为当 $-x_n>1/2^{k-1}$ 时 $\psi_k(x)=0$，由(30)式得以上级数当 x_n 从下面趋于零时绝对且一致收敛. 因此由(29)式

$$
\begin{aligned}
\lim_{x_n\to 0-}D^\alpha E\phi(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}(-2^k)^{\alpha_n}a_kD^\alpha\phi(x',0+)\\
&=D^\alpha\phi(x',0+)=\lim_{x_n\to 0+}D^\alpha E\phi(x)\\
&=D^\alpha E\phi(0).
\end{aligned}
$$

因此 $E\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. 此外，如果 $|\alpha|\leqslant m$，

$$
|\psi_k(x)|^p\leqslant K_1^p|a_k|^p2^{kmp}\sum_{|\beta|\leqslant m}|D^\beta\phi(x',-2^kx_n)|^p,
$$

其中 K_1 依赖于 m,p,n，和 f. 因此

$$
\begin{aligned}
\|\psi_k\|_{0,p,\mathbf{R}^n_-}&\leqslant K_1|a_k|2^{km}\left\{\sum_{|\beta|\leqslant m}\int_{\mathbf{R}^n_-}|D^\beta\phi(x',-2^kx_n)|^pdx\right\}^{1/p}\\
&=K_1|a_k|2^{km}\left\{(1/2^k)\sum_{|\beta|\leqslant m}\int_{\mathbf{R}^n_+}|D^\beta\phi(y)|^pdy\right\}^{1/p}\\
&\leqslant K_1|a_k|2^{km}\|\phi\|_{m,p,\mathbf{R}^n_+}.
\end{aligned}
$$

由(30)得

$$
\begin{aligned}
\|D^\alpha E\phi\|_{0,p,\mathbf{R}^n_-}&\leqslant K_1\|\phi\|_{m,p,\mathbf{R}^n_+}\sum_{k=0}^{\infty}2^{km}|a_k|\\
&\leqslant K_2\|\phi\|_{m,p,\mathbf{R}^n_+}.
\end{aligned}
$$

把它和对于 $\|D^\alpha E\phi\|_{0,p,\mathbf{R}^n_+}$ 的类似的明显不等式联立，我们得

$$\|E\phi\|_{m,p,\mathbf{R}^n}\leqslant K_3\|\phi\|_{m,p,\mathbf{R}^n_+},$$

其中 $K_3=K_3(m,p,n)$，证毕.∎

4.29 在定理 4.26(类似地，在定理 4.28)中bdryΩ服从有界这一限制，因此覆盖$\{\mathscr{V}_j\}$有限. 这个有限性在证明中有两处用到，首先用在断言常数 K_4 的存在性，其次用在得到(28)的最后的不等式. 这后一个用处在证明中不是基本的，因为，即使覆盖$\{\mathscr{V}_j\}$不是有限的，(28)还是可以从有限相交性质得到[4.6 节，条件(ii)]. 定理 4.26 和 4.28 可推广到任意的适当正则的区域，这些区域存在一个从属于覆盖$\{\mathscr{V}_j\}$的单位分解$\{\omega_j\}$，对任意给定的 α, $D^\alpha\omega_j$对 j 一致地在 $\mathbf{R}^n$ 上有界，读者可以发现，用以上技巧作出一些没有被以上定理包括的区域的延拓算子是很有兴味的，例如，四分之一空间，带形，方盒子，和它们的光滑的像.

这里可以提一下，虽然 Calderón 延拓定理(定理 4.32)的证明方法和以上的反射的方法很不一样，但是证明用到了与定理 4.26 相类似的单位分解. 因此，以上考虑对它也适用. 这个定理在一个加强形式的一致锥条件下证明，如果Ω有有界边界，它归结为第 4.4 节的一致锥条件.

在给出 Calderón 定理之前，我们给出两个在证明中用到的关于卷积算子的熟知的结果. 第一个是 W. H. Young 的定理的特殊情形.

4.30 定理 (Young) 设 $1\leqslant p<\infty$ 并且假设 $u\in L^1(\mathbf{R}^n)$ 和 $v\in L^p(\mathbf{R}^n)$. 则卷积

$$u*v(x)=\int_{\mathbf{R}^n}u(x-y)v(y)\,dy,$$

$$v*u(x)=\int_{\mathbf{R}^n}v(x-y)u(y)\,dy$$

有明确定义而且对几乎所有的 $x\in\mathbf{R}^n$相等. 不仅如此，$u*v\in L^p(\mathbf{R}^n)$ 并且

$$\|u*v\|_p \leqslant \|u\|_1 \|v\|_p. \tag{33}$$

证明 如果 $p=1$，证明是 Fubini 定理的简单推论，因此我们假定 $1<p<\infty$. 设 $w\in L^{p'}(\Omega)$，则

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbf{R}^n} w(x)\int_{\mathbf{R}^n} u(x-y)v(y)dydx\right| \\
&=\left|\int_{\mathbf{R}^n} w(x)\int_{\mathbf{R}^n} u(y)v(x-y)dydx\right| \\
&\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}|u(y)|dy\int_{\mathbf{R}^n}|v(x-y)||w(x)|dx \\
&\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}|u(y)|dy\left\{\int_{\mathbf{R}^n}|v(x-y)|^p dx\right\}^{1/p} \\
&\quad\times\left\{\int_{\mathbf{R}^n}|w(x)|^{p'}dx\right\}^{1/p'} \\
&=\|u\|_1\|v\|_p\|w\|_{p'}
\end{aligned}$$

因为 w 可以选得无处为零，因此 $u*v(x)$ 和 $v*u(x)$ 必须 a. e. 有限. 此外，泛函

$$F_{u*v}(w)=\int_{\mathbf{R}^n} u*v(x)w(x)dx$$

属于 $[L^{p'}(\mathbf{R}^n)]'$，所以由定理2. 33，存在 $\lambda\in L^p(\mathbf{R}^n)$，$\|\lambda\|_p\leqslant\|u\|_1\|v\|_p$，使得对所有的 $w\in L^{p'}(\mathbf{R}^n)$

$$\int_{\mathbf{R}^n}\lambda(x)w(x)dx=\int_{\mathbf{R}^n}u*v(x)w(x)dx.$$

因此 $\lambda=u*v\in L^p(\mathbf{R}^n)$ 并且证明了(33). $u*v$ 与 $v*u$ 相等的证明是初等的. ▌

下面的定理是 Caldlrón 和Zygmund 对包含不可积奇性核的卷积的著名不等式的特殊情形[16]，对我们的目的来说它是适用的. 证明很长，可以在很多地方找到(例如，Stein 和 Weiss [65]). 这里省略了. 这个不等式和基于这个不等式的延拓定理在本专著里今后没有用到.

设 $B_R=\{x\in\mathbf{R}^n: |x|\leqslant R\}$，$S_R=\{x\in\mathbf{R}^n: |x|=R\}$，并设 $d\sigma_R$是

S_R 上的面积元[Lebesgue$(n-1)$-测度]. 函数 g 称为在 $B_R\sim\{0\}$ 上 μ 阶齐次，如果对所有的 $x\in B_R\sim\{0\}$ 和 $0<t\leqslant 1$，$g(tx)=t^\mu g(x)$.

4.31 定理 (Calderón-Zygmund 不等式) 设

$$g(x)=G(x)|x|^{-n},$$

其中

(i) G 在 $\mathbf{R}^n\sim\{0\}$ 上有界并且有紧支集,

(ii) 对某个 $R>0$, G 在 $B_R\sim\{0\}$ 上 0 阶齐次, 并且

(iii) $\int_{S_R} G(x)d\sigma_R=0.$

如果 $1<p<\infty$ 并且 $u\in L^p(\mathbf{R}^n)$ 则卷积积分的主值

$$u*g(x)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbf{R}^n\sim B_\varepsilon} u(x-y)g(y)dy$$

对几乎所有的 $x\in\mathbf{R}^n$ 存在, 并且存在常数 $K=K(G,p)$ 使对所有这样的 u

$$\|u*g\|_p\leqslant K\|u\|_p.$$

反之，如果 G 满足(i)和(ii)并且如果对所有的 $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $u*g$ 存在，则 G 满足(iii).

4.32 定理 (Calderón 延拓定理) 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 内一个区域，它具有作了如下改变的一致锥性质(第 4.4 节):

(i) bdryΩ 的开覆盖 $\{U_j\}$ 要求有限, 并且

(ii) 集合 U_j 不要求有界.

则对任意的 $m\in\{1,2,\cdots\}$ 和任意的 p, $1<p<\infty$，存在一个 Ω 的简单 (m,p)-延拓算子 $E=E(m,p)$.

证明 设 $\{U_1, U_2,\cdots, U_N\}$ 是一致锥性质给出的 bdryΩ 的开覆盖, 并且设 U_0 是与 bdryΩ 分开的开子集, 使得 $\Omega\subset\bigcup_{j=0}^{N}U_j$ [由第 4.4 节条件(ii)，这样的 U_0 是存在的.]设 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_N$ 是对 Ω 的

C^∞-单位分解，$\operatorname{supp}\omega_j\subset U_j$. 对于 $1\leqslant j\leqslant N$ 我们将定义算子 E_j，使得如果 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，则 $E_ju\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 并且满足

$$E_ju=u,\qquad 在 U_j\cap\Omega,$$
$$\|E_ju\|_{m,p,\mathbf{R}^n}\leqslant K_{m,p,j}\|u\|_{m,p,\Omega}. \tag{34}$$

所要的延拓算子显然由

$$Eu=\omega_0u+\sum_{j=1}^N\omega_jE_ju$$

给出. 我们把 $x\in\mathbf{R}^n$ 写成极坐标形式 $x=\rho\sigma$，其中 $\rho\geqslant0$，σ 是单位向量. 设 C_j 是在一致锥性质叙述中与 U_j 对应的锥，它有顶点为0. 设 ϕ_j 是定义在 $\mathbf{R}^n\sim\{0\}$ 上的函数，并且满足

(i) 对所有的 $x\neq0$，$\phi_j(x)\geqslant0$，

(ii) $\operatorname{supp}\phi_j\subset-C_j\cup\{0\}$，

(iii) $\phi_j\in C^\infty(\mathbf{R}^n\sim\{0\})$，

(iv) 对某个 $\varepsilon>0$，ϕ_j 在 $B_\varepsilon\sim\{0\}$ 是 $m-n$ 阶齐次的. 既然 $\rho^{n-1}\phi_j$ 在 $B_\varepsilon\sim\{0\}$ 上是 $m-1\geqslant0$ 阶齐次的，所以函数 $\psi_j(x)=(\partial/\partial\rho)^m[\rho^{n-1}\phi_j(x)]$ 在 $B_\varepsilon\sim\{0\}$ 上等于零. 因此 ψ_j 在 $x=0$ 处延拓为零以后，属于 $C_0^\infty(-C_j)$. 定义

$$E_ju(y)=K_j\left\{(-1)^m\int_S\int_0^\infty\phi_j(\rho\sigma)\rho^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^mu(y-\rho\sigma)d\rho d\sigma\right.$$
$$\left.-\int_S\int_0^\infty\psi_j(\rho\sigma)u(y-\rho\sigma)d\rho d\sigma\right\}, \tag{35}$$

其中 $\int_S\cdot d\sigma$ 表示在单位球上的积分. 常数 K_j 马上就要确定. 如果 $y\in U_j\cap\Omega$，则暂时假定 $u\in C^\infty(\Omega)$，由第 4.4 节条件(iii) $u(y-\rho\sigma)$ 在 $\rho\sigma\in\operatorname{supp}\phi_j$ 上无穷次可微，分部积分 m 次得

$$(-1)^m\int_0^\infty\rho^{n-1}\phi_j(\rho\sigma)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^mu(y-\rho\sigma)d\rho$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-k}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{k}[\rho^{n-1}\phi_j(\rho\sigma)]$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{m-k-1}u(y-\rho\sigma)\Big|_{\rho=0}^{\rho=\infty}$$
$$+\int_0^\infty\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{m}[\rho^{n-1}\phi_j(\rho\sigma)]u(y-\rho\sigma)d\rho$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{m-1}[\rho^{n-1}\phi_j(\rho\sigma)]\Big|_{\rho=0}u(y)+\int_0^\infty\psi_j(\rho\sigma)$$
$$\times u(y-\rho\sigma)d\rho.$$

因此

$$E_ju(y)=K_ju(y)\int_S\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{m-1}[\rho^{n-1}\phi_j(\rho\sigma)]\Big|_{\rho=0}d\sigma.$$

因为$(\partial/\partial\rho)^{m-1}[\rho^{n-1}\phi_j(\rho\sigma)]$在 0 附近是 0 阶齐次的，如果 ϕ_j 不恒等于零,以上积分就不等于零. 因此可以选K_j使对于 $y\in U_j\cap\Omega$,和所有的 $u\in C^\infty(\Omega)$, $E_ju(y)=u(y)$. 因为 $C^\infty(\Omega)$在 $W^{m,p}(\Omega)$内稠密,对于所有的 $u\in W^{m,p}(\Omega)$在$U_j\cap\Omega$ 上 $E_ju(y)=u(y)$a. e.. 剩下还要说明(34)式成立,即对任意的 α, $|\alpha|\leqslant m$,

$$\|D^\alpha E_ju\|_{0,p,\mathbf{R}^n}\leqslant K_\alpha\|u\|_{m,p,\Omega}.$$

(35)中最后一个积分形如 $\theta_j*u(y)$, 其中 $\theta_j(x)=\psi_j(x)|x|^{1-n}$ 因为 $\theta_j\in L^1(\mathbf{R}^n)$并且有紧支集,通过Young 定理 4.30 和用光滑函数对 u 作适当的逼近得:

$$\|D^\alpha(\theta_j*u)\|_{0,p,\mathbf{R}^n}=\|\theta_j*(D^\alpha u)\|_{0,p,\mathbf{R}^n}$$
$$\leqslant\|\theta_j\|_{0,1,\mathbf{R}^n}\|D^\alpha u\|_{0,p,\Omega}.$$

剩下还要说明(35) 中第一个积分定义了从 $W^{m,p}(\Omega)$到 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$的有界映射. 因为 $(\partial/\partial\rho)^m=\sum_{|\alpha|=m}(m!/\alpha!)\sigma^\alpha D^\alpha$ 我们得

$$\int_S\int_0^\infty\phi_j(\rho\sigma)\rho^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{m}u(y-\rho\sigma)d\rho d\sigma$$
$$=\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\int_{\mathbf{R}^n}\phi_j(x)D_x^\alpha u(y-x)\sigma^\alpha dx$$

$$= \sum_{|\alpha|=m} \xi_\alpha * D^\alpha u,$$

其中 $\xi_\alpha=(-1)^{|\alpha|}(m!/\alpha!)\sigma^\alpha\phi_j$ 在 $B_\varepsilon\sim\{0\}$上是 $m-n$ 阶齐次的并且属于 $C^\infty(\mathbf{R}^n-\{0\})$. 现在显然只要说明对任意的 β, $|\beta|\leqslant m$,

$$\|D^\beta(\xi_\alpha * v)\|_{0,p,\mathbf{R}^n}\leqslant K_{\alpha,\beta}\|v\|_{0,p,\Omega}. \tag{36}$$

如果$|\beta|\leqslant m-1$, 则 $D^\beta\xi_\alpha$ 在 $B_\varepsilon\sim\{0\}$上是不超过 $1-n$ 阶齐次的. 因此属于 $L^1(\mathbf{R}^n)$. 不等式(36)由 Young 定理的论证可得. 因此我们只要考虑$|\beta|=m$ 的情形, 在此情形我们对某个 γ, $|\gamma|=m-1$ 和某个 i, $1\leqslant i\leqslant n$, 记 $D^\beta=(\partial/\partial x_i)D^\gamma$. 暂时假设 $v\in C_0^\infty(\Omega)$. 则我们可以记

$$\begin{aligned} D^\beta(\xi_\alpha * v)(x) &= [D^\gamma\xi_\alpha] * \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)v\right](x) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} D_i v(x-y) D^\gamma\xi_\alpha(y)dy \\ &= \lim_{\delta\to 0+}\int_{\mathbf{R}^n\sim B_\delta} D_i v(x-y) D^\gamma\xi_\alpha(y)dy. \end{aligned}$$

我们现在在最后的积分中分部积分解脱作用在 v 上的 D_i 并在积分中得到 $D^\beta\xi_\alpha$. 积分项是 $v(x-\cdot)$ 与一个在零点附近 $1-n$ 阶齐次的函数的乘积在球 S_δ 上的面积分. 当$\delta\to0+$这个面积分必须对某个常数K趋于 $Kv(x)$. 注意 $D_i v(x-y)=-(\partial/\partial y_i)v(x-y)$, 我们现在有

$$\begin{aligned} &D^\beta(\xi_\alpha * v)(x) \\ &= \lim_{\delta\to 0+}\int_{\mathbf{R}^n} v(x-y)D^\beta\xi_\alpha(y)dy + Kv(x). \end{aligned}$$

现在 $D^\beta\xi_\alpha$ 在原点附近是$(-n)$阶齐次的, 因此由定理 4.31 的最后的结论, $D^\beta\cdot\xi_\alpha$ 满足该定理关于奇异核 g 的所有条件. 由于 $p>1$, 对于任意的 $v\in L^p(\Omega)$我们有(在Ω之外看成恒等于零)

$$\|D^\beta\xi_\alpha * v\|_{0,p,\mathbf{R}^n}\leqslant K_{\alpha,\beta}\|v\|_{0,p,\Omega}.$$

证毕. ∎

第五章　$W^{m,p}(\Omega)$的嵌入

Sobolev 嵌入定理

5.1　主要是由于 Sobolev 空间的嵌入性质才使得 Sobolev 空间在分析中，特别是在微分算子和积分算子的研究中如此的有用. 空间 $W^{m,p}(\Omega)$的最重要的嵌入性质通常总括在一个叫做 Sobolev 嵌入定理的定理之中. 核心的结果应归功于 Sobolev[63]，但是我们的讲法(定理 5.4)包括了其他一些作者的改进，尤其是 Morrey [47]和 Gagliardo[24].

对于 $\mathbf{R}^n$ 中具有锥性质的区域 Ω，大多数嵌入结果是成立的，但是另一些嵌入结果不需要这种限制；然而某些嵌入定理要求强的局部 Lipschitz 性质. 特别是如果 Ω 只有锥性质，那么就可能不存在 $W^{m,p}(\Omega)$到 Ω 上的一致连续函数空间的嵌入，通过对 3.17节第二段中给出的例子的研究就能够看到这一点.

5.2　Sobolev 嵌入定理断言 $W^{m,p}(\Omega)$到下列类型的空间的嵌入是存在的，这些空间是：

(i) $W^{j,q}(\Omega)$，$j\leqslant m$，特别是 $L^q(\Omega)$.

(ii) $C_B^j(\Omega)=\{u\in C^j(\Omega): D^\alpha u$ 在 Ω 上有界，$|\alpha|\leqslant j\}$，这个空间比$C^j(\overline{\Omega})$大，其元素不必在 Ω 上一致连续. 然而，在范数

$$\|u;C_B^j(\Omega)\|=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant j}\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha u(x)|$$

下，$C_B^j(\Omega)$是一个 Banach 空间.

(iii) $C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$(见 1.27 节)特别是$C^j(\overline{\Omega})$.

(iv) $W^{j,q}(\Omega^k)$，特别是 $L^q(\Omega^k)$. 这里 Ω^k表示Ω和 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 k 维平面的交集，看作 $\mathbf{R}^k$ 中的一个区域.

因为，严格地说，$W^{m,p}(\Omega)$ 中的元素不是在 Ω 上处处有定义的函数，而是在 Ω 去掉一个零测集上有定义且互相相等的那种函数构成的等价类，故我们必须说清楚 $W^{m,p}(\Omega)$ 嵌入到(ii)——(iv)类型的空间中去是什么意思．在把 $W^{m,p}(\Omega)$ 嵌入到(ii)或(iii)的情形，嵌入的意思就是指"等价类"$u\in W^{m,p}(\Omega)$ 中应该包含有一个函数，它属于要嵌入的目标即连续函数空间，而且在连续函数空间中为一个常数乘以 $\|u\|_{m,p,\Omega}$ 所界定．因此，举例说，$W^{m,p}(\Omega)\to C^j(\overline{\Omega})$ 的意思就是说，每个 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，当我们把它看作一个函数时，能够在 Ω 中的一个零测集上重新定义它的值使得修改以后的函数 $\tilde{u}$[它在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中等于 u]属于 $C^j(\overline{\Omega})$，而且满足 $\|\tilde{u}; C^j(\overline{\Omega})\|\leqslant K\|u\|_{m,p,\Omega}$，$K$ 与 u 无关．

在解释嵌入 $W^{m,p}(\Omega)\to W^{j,q}(\Omega^k)$ 时，其中 $k<n$，就更要小心了．根据定理 3.16，每个元素 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 中一个函数序列$\{u_n\}$在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的一个极限，函数 u_n 在 Ω^k 上具有属于 $C^\infty(\Omega^k)$ 的迹．上述嵌入意味着这些迹在 $W^{j,q}(\Omega^k)$ 收敛到一个函数 $\tilde{u}$，它满足 $\|\tilde{u}\|_{j,q,\Omega^k}\leqslant K\|u\|_{m,p,\Omega}$，$K$ 与 u 无关．

我们注意到一个有趣的事实(虽然以后我们用不着它)，即嵌入 $W^{m,p}(\Omega)\to W^{j,q}(\Omega)$ 等价于简单的包含关系 $W^{m,p}(\Omega)\subset W^{j,q}(\Omega)$，无疑嵌入关系推出包含关系．为了证明包含关系也能推出嵌入关系，假定 $W^{m,p}(\Omega)\subset W^{j,q}(\Omega)$ 而且设 I 是由 $Iu=u$ 定义的 $W^{m,p}(\Omega)$ 到 $W^{j,q}(\Omega)$ 中的线性算子．如果在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中(因此在 $L^p(\Omega)$ 中)$u_n\to u$ 而且在 $W^{j,q}(\Omega)$ 中(因此在 $L^q(\Omega)$ 中)$Iu_n\to v$，那么如果必要时通过取子序列的方法，由 2.11 节的推论，我们在 Ω 中有 $u_n(x)\to u(x)$ a. e.，而且在 Ω 中 $u_n(x)=Iu_n(x)\to v(x)$ a. e.．于是在 Ω 中 $u(x)=v(x)$ a. e.，即 $Iu=v$，而且，由泛函分析中的闭图定理，I 是连续的．

5.3 设 $\mathbb{R}^n$ 中的区域 Ω 具有由一个有限锥 C 所规定的锥性质（见

4.3 节)，C 可以看作是和 C 有同样顶点的无限锥 C^* 和中心也在这个顶点的球 B 的交集. 把 B 的半径称为 C 的高. 把 C^* 和球心在 C 的顶点的单位球所交的曲面的面积[$(n-1)$ 维测度]叫做 C 的开度(opening). 这些几何参数显然是 C 的刚体变换下的不变量.

在断言对于具有锥性质的区域 Ω 的形如

$$W^{m,p}(\Omega)\to X \tag{1}$$

的嵌入成立时,(其中 X 是由定义在 Ω 上的函数组成的一个Banach空间),意思是说,(1)的嵌入常数,亦即使不等式

$$\|u;X\|\leqslant K\|u\|_{m;p;\Omega}$$

对所有的 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 均成立的常数，可以选得只通过维数 n 和一些不变量(例如锥 C 的在刚体运动下不变的那些参数)来和 Ω 发生依赖关系.

5.4 定理 (Sobolev 嵌入定理) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个区域，又设 Ω^k 是 Ω 和 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 k 维平面相交得到的 k 维区域，$1\leqslant k\leqslant n$. (因此有 $\Omega^n\equiv\Omega$.)设 j 和 m 是非负整数,还设 p 满足 $1\leqslant p<\infty$.

第 I 部分 如果 Ω 具有锥性质,那么存在下列嵌入:

情形 A 假定 $mp<n$ 而且 $n-mp<k\leqslant n$. 则

$$W^{j+m,p}(\Omega)\to W^{j,q}(\Omega^k),\qquad p\leqslant q\leqslant\frac{kp}{n-mp}, \tag{2}$$

特别有,

$$W^{j+m,p}(\Omega)\to W^{j,q}(\Omega),\qquad p\leqslant q\leqslant\frac{np}{n-mp}, \tag{3}$$

或者

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega),\qquad p\leqslant q\leqslant\frac{np}{n-mp}. \tag{4}$$

而且,如果 $p=1$, 因而 $m<n$, 对于 $k=n-m$ 嵌入(2)也存在.

情形 B 假定 $mp=n$. 那么对于每个 k，$1\leqslant k\leqslant n$,

$$W^{j+m,p}(\Omega)\to W^{j,q}(\Omega^k),\qquad p\leqslant q<\infty, \tag{5}$$

所以特别有

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega),\qquad p\leqslant q<\infty. \tag{6}$$

而且，若 $p=1$，因而 $m=n$，则对于 $q=\infty$ 嵌入(5)和(6)同样存在；事实上，

$$W^{j+n,1}(\Omega)\to C_B^j(\Omega). \tag{7}$$

情形 C 假定 $mp>n$，那么

$$W^{j+m,p}(\Omega)\to C_B^j(\Omega). \tag{8}$$

第 II 部分 如果 Ω 具有强局部 Lipschitz 性质，那么能够把第 I 部分情形 C 改善如下：

情形 C′ 假定 $mp>n>(m-1)p$. 则

$$W^{j+m,p}(\Omega)\to C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}),\qquad 0<\lambda\leqslant m-\frac{n}{p}. \tag{9}$$

情形 C″ 假定 $n=(m-1)p$. 则

$$W^{j+m,p}(\Omega)\to C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}),\quad 0<\lambda<1. \tag{10}$$

还有，如果 $n=m-1$ 和 $p=1$，则对 $\lambda=1$ (10)同样成立.

第 III 部分 假如把接受嵌入的 W-空间都替换成相应的W_0-空间，那么第 I 和 II 部分的一切结论对任意区域都成立.

5.5 附注 (1) 嵌入(2)—(8)本质上应归功于Sobolev[62, 63]，但是他的证明中并未包括(2)中 $q=kp/(n-mp)$，或(3)与(4)中 $q=np/(n-mp)$的情形. 嵌入 (9) 和(10) 可以在 Morrey 的工作[47]中找到其原型.

(2) 包含着低维平面上函数迹的类型(2)和(5)的嵌入能够用一种合理的方式推广到使它能应用到更一般的光滑流形的迹上去. 例如，见定理 5.22.

(3) 定理的第 III 部分是第 I 和 II 部分应用到 $\mathbf{R}^n$ 上去的直接的推论，因为按照引理 3.22，把函数在Ω外延拓为零的算子将$W_0^{m,p}(\Omega)$等距地映射到 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$中.

(4) 假定对于 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 嵌入定理的所有结论都已得到证明.

那么就可推出，对于任何满足 4.32 节 Calderon 延拓定理要求的 Ω，这些嵌入定理也都成立. 例如，如果 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)\to L^q(\mathbf{R}^n)$，又如果 E 是 Ω 的一个 (m,p)-延拓算子，则对于任何 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 我们有

$$\|u\|_{0,q,\Omega}\leqslant\|Eu\|_{0,q,\mathbf{R}^n}\leqslant K_1\|Eu\|_{m,p,\mathbf{R}^n}\leqslant K_1K_2\|u\|_{m,p,\Omega},$$

K_1 和 K_2 与 u 无关. 然而我们将不用这种延拓的论证来证明嵌入定理.

(5) 只要对特殊情形 $j=0$ 证明(2),(3),(5),(7)—(10)中的每一个嵌入关系就够了. 例如，如果已经证明 $W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$，那么对任何 $u\in W^{j+m,p}(\Omega)$，对于 $|\alpha|\leqslant j$ 我们就有 $D^\alpha u\in W^{m,p}(\Omega)$，由此 $D^\alpha u\in L^q(\Omega)$，因此 $u\in W^{j,q}(\Omega)$；而且

$$\begin{aligned}\|u\|_{j,q}&=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant j}\|D^\alpha u\|_{0,q}^q\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant K_1\left(\sum_{|\alpha|\leqslant j}\|D^\alpha u\|_{m,p}^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant K_2\|u\|_{j+m,p}.\end{aligned}$$

因此，在证明中我们总是限定 $j=0$.

(6) 当 Ω^k (或 Ω)具有有限体积时，由定理 2.8 得到除去定理中所断言的 q 值外对于 $1\leqslant q<p$ 嵌入(2)—(6)成立. 以后将证明(6.38节)，除非 Ω 具有有限体积，不可能有形如 $W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$ 的嵌入，其中 $q<p$.

嵌入定理的证明

5.6 这里给出的证明是属于 Gagliardo[24]的. 虽然证明稍微长了一点，但是所包含的技巧是十分初等的，把比简单微积分稍多一点的知识和灵活地应用 Hölder 不等式结合起来就是这种技巧的基础. 而且，Gagliardo 的证明以最大可能的一般性建立了嵌入定理，对于某些不具有锥性质的区域也能够推广这个证明去得到

嵌入结果(见定理 5.35—5.37).

证明是通过一系列辅助引理来实现的. 在每个引理的证明中出现的常数 K_1, K_2, …都可以依赖于在引理的叙述中所提到的如 K 那样的参数.

5.7 引理 设

$$R=\{x\in\mathbf{R}^n: a_i<x_i<b_i;\ 1\leqslant i\leqslant n\}$$

与

$$R'=\{x'=(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}:\ a_i<x_i<b_i;\ 1\leqslant i\leqslant n-1\}$$

分别是 $\mathbf{R}^n$ 和$\mathbf{R}^{n-1}$ 中有界的开长方体. 如果 $a_n<\zeta<b_n$ 而且 $p\geqslant 1$, 则对于一切 $u\in C^\infty(R)\cap W^{1,p}(R)$, 有

$$\|u(\cdot,\zeta)\|_{0,p,R'}\leqslant K\|u\|_{1,p,R}, \tag{11}$$

其中$K=K(p, b_n-a_n)$. 因此迹映射$u\to u(\cdot,\zeta)$就扩张成 $W^{1,p}(R)$ 到$L^p(R_\zeta^{n-1})$中的一个嵌入, 其中 $R_\zeta^{n-1}=R\cap\{x\in R^n:\ x_n=\zeta\}$.

证明 由定理3.18, $C^\infty(\bar{R})$在$W^{1,p}(R)$中稠密,所以可假定$u\in C^\infty(\bar{R})$. 因此$\int_{R'}|u(x',\cdot)|^p dx'$ 属于 $C^\infty([a_n, b_n])$, 由积分中值定理, 对某个 $\sigma\in[a_n, b_n]$我们有

$$\begin{aligned}\|u\|_{0,p,R}^p&=\int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{R'}|u(x',x_n)|^p dx'\right)dx_n\\&=(b_n-a_n)\int_{R'}|u(x',\sigma)|^p dx'\end{aligned}$$

现在由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}|u(x',\zeta)|^p&=\left|u(x',\sigma)+\int_\sigma^\zeta D_n u(x',t)\,dt\right|^p\\&\leqslant 2^{p-1}\left[|u(x',\sigma)|^p+|\zeta-\sigma|^{p-1}\int_\sigma^\zeta|D_n u(x',t)|^p dt\right]\end{aligned}$$

在 R' 上积分就导至

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,\zeta)\|_{0,p,R'}^p&\leqslant 2^{p-1}[\|u(\cdot,\sigma)\|_{0,p,R'}^p+(b_n-a_n)^{p-1}\|D_n u\|_{0,p,R}^p]\\&\leqslant 2^{p-1}[(b_n-a_n)^{-1}\|u\|_{0,p,R}^p+(b_n-a_n)^{p-1}\|D_n u\|_{0,p,R}^p],\end{aligned}$$

由此就得到(11)，其中常数 $K=[2^{p-1}\max\ ((b_n-a_n)^{-1},\ (b_n-a_n)^{p-1})]^{1/p}$. 我们注意到$K$连续依赖于 b_n-a_n，但当 b_n-a_n 趋于零或无穷时 K 可以趋于无穷大. ▌

5.8 引理 设R如上面引理中所述，则

$$W^{n,1}(R)\longrightarrow C(\bar{R}).$$

嵌入常数只依赖于 n 和R的大小.

证明 设 x 是R中的任意一点，又设 R' 如上述引理所述. 如果 $u\in C^\infty(\bar{R})$且$|\alpha|\leqslant n-1$，则由引理 5.7，有

$$\|D^\alpha u(\cdot,x_n)\|_{0,1,R'}\leqslant K_1\|D^\alpha u\|_{1,1,R}.$$

因此

$$\|u(\cdot,x_n)\|_{n-1,1,R'}\leqslant K_2\|u\|_{n,1,R},$$

K_2依赖于 b_n-a_n，在更低维的长方体上逐次地重复这种论证就导至

$$\|u(\cdot,x_2,\cdots,x_n)\|_{1,1,(a_1,b_1)}\leqslant K_3\|u\|_{n,1,R},$$

K_3 依赖于 b_j-a_j, $2\leqslant j\leqslant n$. 由积分中值定理，存在 $\sigma\in[a_1,b_1]$使得.

$$\|u(\cdot,x_2,\cdots,x_n)\|_{0,1,(a_1,b_1)}=(b_1-a_1)\,|u(\sigma,x_2,\cdots,x_n)|.$$

因此

$$\begin{aligned}|u(x)|&\leqslant|u(\sigma,x_2,\cdots,x_n)|+\int_\sigma^{x_1}|D_1u(t,x_2,\cdots,x_n)|\,dt\\&\leqslant[1/(b_1-a_1)]\|u(\cdot,x_2,\cdots,x_n)\|_{0,1,(a_1,b_1)}\\&\quad+\|D_1u(\cdot,x_2,\cdots,x_n)\|_{0,1,(a_1,b_1)}\leqslant K\|u\|_{n,1,R}.\end{aligned}\qquad(12)$$

现在假定 $u\in W^{n,1}(R)$. 由定理3.18，u 是 $C^\infty(\bar{R})$里的函数序列在 $W^{n,1}(R)$中的极限. 从(12)得出这个序列在$\bar{R}$上一致收敛到一个函数 $\tilde{u}\in C(\bar{R})$. 由于在 R中 $\tilde{u}(x)=u(x)$a.e.，引理得证. ▌

现在把我们的注意力转向更一般的区域. 下面Gagliardo的引理是他证明嵌入定理的基础，这个引理本质上是属于组合性质的.

5.9 引理 设Ω是$\mathbf{R}^n$中一个区域，$n\geqslant 2$. 设k是满足$1\leqslant k\leqslant n$的整数，又设$\kappa=(\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_k)$ 表示满足$1\leqslant\kappa_1<\kappa_2<\cdots<\kappa_k\leqslant n$的$k$重整数. 设$S$是由全体$\binom{n}{k}$个这样的$k$重数构成的集合. 还给定$x\in\mathbf{R}^n$, 设$x_\kappa$表示点$(x_{\kappa_1},\cdots,x_{\kappa_k})\in\mathbf{R}^k$; $dx_\kappa=dx_{\kappa_1}\cdots dx_{\kappa_k}$.

对于给定的$\kappa\in S$, 设E_κ是由相应于x_κ的分量的坐标轴张起来的$\mathbf{R}^n$中的k维平面:

$$E_\kappa=\{x\in\mathbf{R}^n: x_i=0 \text{ 如果 } i\notin\kappa\};$$

对于任何集合$G\subset\mathbf{R}^n$, 设G_κ是G在E_κ上的投影; 特别

$$\Omega_\kappa=\{x\in E_\kappa: \exists y\in\Omega \text{ 使 } y_\kappa=x_\kappa\}.$$

设F_κ是依赖于x_κ的k个分量的函数而且属于$L^\lambda(\Omega_\kappa)$, 其中$\lambda=\binom{n-1}{k-1}$. 那么由

$$F(x)=\prod_{\kappa\in S}F_\kappa(x_\kappa)$$

给出的定义在Ω上的函数F属于$L^1(\Omega)$, 而且$\|F\|_{1,\Omega}\leqslant\prod_{\kappa\in S}\|F_\kappa\|_{\lambda,\Omega_\kappa}$, 即

$$\left[\int_\Omega|F(x)|dx\right]^\lambda\leqslant\prod_{\kappa\in S}\int_{\Omega_\kappa}|F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_\kappa. \tag{13}$$

证明 对于$\kappa\in S$和$\xi_\kappa\in\mathbf{R}^k$, 设$\Omega(\xi_\kappa)$表示$\Omega$和平面$x_\kappa=\xi_\kappa$相交的$k$维平截面:

$$\Omega(\xi_\kappa)=\{x\in\Omega: x_\kappa=\xi_\kappa\}.$$

我们对n做归纳法证明(13)式，因此首先考虑$n=2$的情形. 因为对于任何n, $k=n$时(13)式总是对的，所以可以假定$k=1$. 对于$n=2, k=1$有$\lambda=1$, S只有两个元素$\kappa=1$和$\kappa=2$. 因此

$$\int_\Omega|F_1(x_1)F_2(x_2)|dx_1dx_2=\int_{\Omega_1}dx_1\int_{\Omega(x_1)}|F_1(x_1)F_2(x_2)|dx_2$$

$$=\int_{\Omega_1}|F_1(x_1)|dx_1\int_{(\Omega(x_1))_2}|F_2(x_2)|dx_2$$

$$\leqslant\int_{\Omega_1}|F_1(x_1)|dx_1\int_{\Omega_2}|F_2(x_2)|dx_2,$$

因为对任何x_1显然有$(\Omega(x_1))_2\subset\Omega_2$. 这就是$n=2,k=1$时的(13)式. (进行类似的计算就可得到任意$n$和$k=1$时的(13)式.)

现在假定对$n=N-1$(13)式已经证明. 我们来研究$n=N$的情形,如前所述,可以假定$2\leqslant k\leqslant N-1$. 于是$\lambda=\binom{N-1}{k-1}$. 设$\mu=\binom{N-2}{k-1}$而$\nu=\binom{N-2}{k-2}$. (13)式左端的被积函数是$\binom{N}{k}$个因子$|F_\kappa|$的积,而每个$F_\kappa$属于相应的空间$L^\lambda(\Omega_\kappa)$. 实际上这些因子中的$\binom{N-1}{k}$个因子是和$x_N$无关的. 把这些因子叫做是与$\kappa\in A\subset S$相应的因子. 对$(N-1)$维区域$\Omega(x_N)$应用归纳法假设,而且注意到$(\Omega(x_N))_\kappa\subset\Omega_\kappa$就得到

$$\int_{\Omega(x_N)}\prod_{\kappa\in A}|F_\kappa(x_\kappa)|^{\lambda/\mu}dx_1\cdots dx_{N-1}$$

$$\leqslant\prod_{\kappa\in A}\left[\int_{(\Omega(x_N))_\kappa}|F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_\kappa\right]^{1/\mu}$$

$$\leqslant\prod_{\kappa\in A}\left[\int_{\Omega_\kappa}|F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_\kappa\right]^{1/\mu}. \tag{14}$$

剩下$\binom{N}{k}-\binom{N-1}{k}=\lambda$个因子$|F_\kappa|$依赖于$x_N$,所以当限于$\Omega(x_N)$上时,只依赖于$k-1$个变量. 在$\Omega(x_N)$上再次应用归纳法假设,但这一次用$k-1$代替$k$,我们得到

$$\int_{\Omega(x_N)}\prod_{\kappa\in S\sim A}|F_\kappa(x_\kappa)|^{\lambda/\nu}dx_1\cdots dx_{N-1}$$

$$\leqslant\prod_{\kappa\in S\sim A}\left[\int_{(\Omega(x_N))_\kappa}|F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_{\kappa_1}\cdots dx_{\kappa_{k-1}}\right]^{1/\nu}. \tag{15}$$

现在$\mu+\nu=\lambda$所以由Hölder不等式和(14), (15),

$$\int_{\Omega(x_N)}\prod_{\kappa\in S}|F_\kappa(x_\kappa)|dx_1\cdots dx_{N-1}$$

$$\leqslant \prod_{\kappa\in A}\left[\int_{\Omega_\kappa}|F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_\kappa\right]^{1/\lambda}$$

$$\times \prod_{\kappa\in S\sim A}\left[\int_{(\Omega(x_N))_\kappa}|F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_{\kappa_1}\cdots dx_{\kappa_{k-1}}\right]^{1/\lambda}. \qquad (16)$$

由于 $S\sim A$ 包含 λ 个元素，利用(多个函数形式的)Hölder 不等式得到

$$\int_{\Omega_N}\prod_{\kappa\in S\sim A}\left[\int_{(\Omega(x_N))_\kappa}|F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_{\kappa_1}\cdots dx_{\kappa_{k-1}}\right]^{1/\lambda}dx_N$$

$$\leqslant \prod_{\kappa\in S\sim A}\left[\int_{\Omega_N}\int_{(\Omega(x_N))_\kappa}|F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_\kappa\right]^{1/\lambda}$$

$$\leqslant \prod_{\kappa\in S\sim A}\left[\int_{\Omega_\kappa}|F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_\kappa\right]^{1/\lambda}. \qquad (17)$$

把(17)式插入到(16)式中去就得到

$$\int_\Omega\prod_{\kappa\in S}|F_\kappa(x_\kappa)|dx=\int_{\Omega_N}dx_N\int_{\Omega(x_N)}\prod_{\kappa\in S}|F_\kappa(x_\kappa)|dx_1\cdots dx_{N-1}$$

$$\leqslant\prod_{\kappa\in S}\left[\int_{\Omega_\kappa}|F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_\kappa\right]^{1/\lambda}.$$

这就完成了归纳法并证明了(13). ▌

5.10 引理 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有锥性质的有界区域. 如果 $1\leqslant p<n$, 则 $W^{1,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$，其中 $q=np/(n-p)$. 嵌入常数可以选得只和 m, p, n 和决定 Ω 的锥性质的锥 C 有关.

证明 我们必须证明，对于任何 $u\in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{0,q,\Omega}\leqslant K\|u\|_{1,p,\Omega}, \qquad (18)$$

$K=K(m, p, n, C)$. 由定理 4.8 知，Ω 可以表为有限个子区域的并集，每个子区域都有强局部 Lipschitz 性质（因此具有线段性质)，而且每个子区域都是一个相应的平行多面体的平移集的并集. 回顾一下定理 4.8 的证明，就知道子区域的数目和相应的平行多面体的大小依赖于 n 和 C，所以只对这些子区域中的一个证明(18)就行了.

通过定理 3.35 和一个合适的非奇异线性变换，实际上我们可以假定子区域所包含的平行多面体是边长为 2 个单位的立方体 Q，而且 Q 的边平行于坐标轴. 因此今后我们假定 $\Omega=\bigcup_{x\in A}(x+Q)$，$A\subset\Omega$，而且 Ω 具有线段性质. 由定理 3.18，只要对 $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$ 证实(18)就行了.

对 $x\in\Omega$，令 $w_i(x)$ 表示 Ω 和通过 x 平行于 x_i 坐标轴的直线的交. 显然 $w_i(x)$ 包含一个端点在 x 的单位长线段，比如线段 $x+te_i$，$0\leqslant t<1$，其中 e_i 是沿着 x_i 轴的单位向量.

设 $\gamma=(np-p)/(n-p)$，因而 $\gamma\geqslant 1$. 对于 $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$，分部积分给出

$$\begin{aligned}&\int_0^1|u(x+(1-t)e_i)|^\gamma dt\\=&|u(x)|^\gamma-\gamma\int_0^1 t|u(x+(1-t)e_i)|^{\gamma-1}\\&\times\frac{d}{dt}|u(x+(1-t)e_i)|dt.\end{aligned}\tag{19}$$

设 $\hat{x}_i=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$ 并令

$$F_i(\hat{x}_i)=\sup_{y\in w_i(x)}|u(y)|^{p/(n-p)}.$$

则(19)给出

$$\begin{aligned}|F_i(\hat{x}_i)|^{n-1}\leqslant&\int_{w_i(x)}|u(x)|^\gamma dx_i\\&+\gamma\int_{w_i(x)}|u(x)|^{\gamma-1}|D_iu(x)|dx_i.\end{aligned}\tag{20}$$

在 Ω_i（Ω 在平面 $x_i=0$ 上的投影）上积分，就导至

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_i}|F_i(\hat{x}_i)|^{n-1}d\hat{x}_i\\\leqslant&\int_\Omega|u(x)|^\gamma dx+\gamma\int_\Omega|u(x)|^{\gamma-1}|D_iu(x)|dx.\end{aligned}$$

如果 $p>1$ 则 $\gamma>1$，因为 $(\gamma-1)p'=q$，应用 Hölder 不等式就得到

$$\|F_i\|_{0,n-1,\Omega_i}^{n-1}\leqslant\gamma\left[\int_{\Omega}(|u(x)|+|D_iu(x)|)^p dx\right]^{1/p}$$

$$\times\left[\int_{\Omega}|u(x)|^{(\gamma-1)p'}dx\right]^{1/p'}$$

$$\leqslant 2^{(p-1)/p}\gamma\|u\|_{1,p,\Omega}\|u\|_{0,q,\Omega}^{q/p'}.$$

现在把引理 5.9 用到函数 F_i 上去，$1\leqslant i\leqslant n$，注意到 $k=n-1$ 所以这个引理的指数 λ 就是 $n-1$:

$$\|u\|_{0,q,\Omega}^{q}=\int_{\Omega}|u(x)|^{np/(n-p)}dx\leqslant\int_{\Omega}\prod_{i=1}^{n}F_i(\hat{x}_i)\,dx$$

$$\leqslant\prod_{i=1}^{n}\|F_i\|_{0,n-1,\Omega_i}$$

$$\leqslant\left(2^{(p-1)/p}\gamma\|u\|_{1,p,\Omega}\|u\|_{0,q,\Omega}^{q/p'}\right)^{n/(n-1)}.$$

由于 $(n-1)q/n-q/p'=1$，消去因子就得到(18)式. 因为 $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$ 而且 Ω 是有界的，所以 $\|u\|_{0,q,\Omega}$ 是有限的，因此消去因子是合法的，由于 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中稠密，根据连续性(18)就可以扩充到对 $W^{1,p}(\Omega)$ 的所有元素都成立. ▌

5.11 附注 设 $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，又设 q,γ 如上述引理的证明中所述. 从恒等式

$$\int_0^\infty\frac{d}{dt}|u(x+te_i)|^\gamma dt=-|u(x)|^\gamma$$

得到

$$\sup_{y\in w_i(x)}|u(y)|^\gamma\leqslant\gamma\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\gamma-1}|D_iu(x)|dx_i,$$

其中 $w_i(x)$ 是过 x 点平行于 x_i 轴的直线. 把这个不等式和(20)比较一下，重做一下上述引理证明中的计算，这时就可以得到

$$\|u\|_{0,q,\mathbf{R}^n}\leqslant K|u|_{1,p,\mathbf{R}^n},\tag{21}$$

其中 $|\cdot|_{1,p}$ 是 4.11节中所定义的半范数，不等式(21)叫做 Sobolev 不等式。

5.12 引理 设Ω是$\mathbf{R}^n$中具有锥性质的有界区域. 如果$mp<n$, 则对于$p\leqslant q\leqslant np/(n-mp)$, $W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$. 嵌入常数可以选得只依赖于$m,p,n,q$和决定$\Omega$的锥性质的锥$C$.

证明 设$q_0=np/(n-mp)$. 首先对m做归纳法来证明$W^{m,p}(\Omega)\to L^{q_0}(\Omega)$. 注意引理5.10证实了$m=1$时是对的.

所以, 假定当$n>(m-1)p$时, 对于$r=np/(n-mp+p)$有$W^{m-1,p}(\Omega)\to L^r(\Omega)$. 如果$u\in W^{m,p}(\Omega)$, $n>mp$, 则u和$D_ju(1\leqslant j\leqslant n)$属于$W^{m-1,p}(\Omega)$. 由此得到$u\in W^{1,r}(\Omega)$而且

$$\|u\|_{1,r,\Omega}\leqslant K_1\|u\|_{m,p,\Omega}.$$

因为$mp<n$, 我们有$r<n$, 所以由引理5.10我们有$W^{1,r}(\Omega)\to L^{q_0}(\Omega)$, 其中$q_0=nr/(n-r)=np/(n-mp)$而且

$$\|u\|_{0,q_0,\Omega}\leqslant K_2\|u\|_{1,r,\Omega}\leqslant K_3\|u\|_{m,p,\Omega}. \tag{22}$$

这就完成了归纳法的证明.

现在假定$p\leqslant q\leqslant q_0$, 令

$$s=(q_0-q)p/(q_0-p)\text{和}\ t=p/s=(q_0-p)/(q_0-q)$$

利用Hölder不等式和(22)式就得到

$$\begin{aligned}\|u\|_{0,q,\Omega}^q&=\int_\Omega|u(x)|^s|u(x)|^{q-s}dx\\&\leqslant\left[\int_\Omega|u(x)|^{st}dx\right]^{1/t}\left[\int_\Omega|u(x)|^{(q-s)t'}dx\right]^{1/t'}\\&=\|u\|_{0,p,\Omega}^{p/t}\|u\|_{0,q_0,\Omega}^{q_0/t'}\leqslant K_3^{q_0/t'}\|u\|_{m,p,\Omega}^q.\ \blacksquare\end{aligned} \tag{23}$$

5.13 推论 如果$mp=n$, 则对于$p\leqslant q<\infty$, $W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$. 这里的嵌入常数还可以依赖于$\mathrm{vol}\,\Omega$.

证明 如果$q\geqslant p'=p/(p-1)$, 则$q=ns/(n-ms)$, 其中$s=pq/(p+q)$满足$1\leqslant s<p$. 由定理2.8, $W^{m,p}(\Omega)\to W^{m,s}(\Omega)$, 嵌入常数依赖于$\mathrm{vol}\,\Omega$. 因$ms<n$, 由引理5.12, $W^{m,s}(\Omega)\to L^q(\Omega)$. 如果$p\leqslant q\leqslant p'$, 则通过如(23)式所示的那种在$W^{m,p}(\Omega)\to L^p(\Omega)$和

$W^{m,p}(\Omega)\to L^{p'}(\Omega)$ 中间作内插就可得到所要的嵌入. ▌

对于 $mp=n$ 和 $q\geqslant p$ 的情形，下面的引理从引理 5.12 和推论 5.13 中去掉了 Ω 是有界的这一限制，从而说明嵌入常数可以不依赖于 $\mathrm{vol}\Omega$.

5.14 引理 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有锥性质的任意区域. 如果 $mp<n$，则对于 $p\leqslant q\leqslant \frac{np}{n-mp}$, $W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$. 如果 $mp=n$, 则对于 $p\leqslant q<\infty$, $W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$. 如果 $p=1$ 而且 $m=n$, 则 $W^{m,p}(\Omega)\to C_B^0(\Omega)$. 这些嵌入的嵌入常数可以依赖于 m, p, n, q 和决定 Ω 的锥性质的锥 C.

证明 我们用边长为单位的立方体对 $\mathbf{R}^n$ 作田字形划分. 如果 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 是一个 n 重整数，设 $H_\lambda=\{x\in\mathbf{R}^n:\ \lambda_i\leqslant x_i\leqslant\lambda_{i+1},\ 1\leqslant i\leqslant n\}$. 则 $\mathbf{R}^n=\bigcup_\lambda H_\lambda$.

如定理 4.8 证明的第一段中所指出的，即使是具有锥性质的无界区域 Ω 也能表为有限个子区域的并集，比如说 $\Omega=\bigcup_{j=1}^{N}\Omega_j$，使得 $\Omega_j=\bigcup_{x\in A_j}(x+P_j)$，其中 $A_j\subset\Omega$，且 P_j 是有一个顶点在原点的平行多面体. 数目 N 和平行多面体的大小依赖于 n 和决定 Ω 的锥性质的锥 C. 对每个 λ 和 $1\leqslant j\leqslant N$，设

$$\Omega_{\lambda,j}=\bigcup_{x\in A_j\cap H_\lambda}(x+P_j).$$

区域 $\Omega_{\lambda,j}$ 显然有以下性质:

(i) $\Omega=\bigcup_{\lambda,j}\Omega_{\lambda,j}$;

(ii) $\Omega_{\lambda,j}$ 是有界的;

(iii) 存在一个只依赖于 $P_1,\cdots,P_N$(因此只依赖于 n 和 C)的有限锥 C' 使得每个 $\Omega_{\lambda,j}$ 具有由 C' 所决定的锥性质;

(iv) 存在一个依赖于 n 和 C 的正整数 R 使得任何 $R+1$ 个区域 $\Omega_{\lambda,j}$ 的交为空集;

(v) 存在依赖于 n 和 C 的常数 K' 和 K'' 使得对每个 $\Omega_{\lambda,j}$,

$$K' \leqslant \mathrm{vol}\,\Omega_{\lambda,j} \leqslant K''.$$

假定 $mp<n$, 又设 $u \in W^{m,p}(\Omega)$. 如果 $p \leqslant q \leqslant np/(n-mp)$, 则由(ii), (iii)和引理 5.12, 我们有

$$\|u\|_{0,q,\Omega_{\lambda,j}} \leqslant K \|u\|_{m,p,\Omega_{\lambda,j}}, \tag{24}$$

其中 $K=K(m, p, n, q, C)$ 和 λ, j 无关. 因此由(i)和(iv), 又因为 $q \geqslant p$,

$$\|u\|^q_{0,q,\Omega} \leqslant \sum_{\lambda,j} \|u\|^q_{0,q,\Omega_{\lambda,j}} \leqslant K^q \sum_{\lambda,j} [\|u\|^p_{m,p,\Omega_{\lambda,j}}]^{q/p}$$

$$\leqslant K^q \left[\sum_{\lambda,j} \|u\|^p_{m,p,\Omega_{\lambda,j}}\right]^{q/p} \leqslant K^q R^{q/p} \|u\|^q_{m,p,\Omega}.$$

因此 $W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$, 其嵌入常数为 $KR^{1/p}$.

如果 $mp=n$, 由于推论 5.13 对于任何使 $p \leqslant q < \infty$ 的 q, (24)式成立, 而且由于(V), 常数K可以选得和 λ, j 无关, 继续做(24)式后面的证明, 就得到 $n=mp$ 时的嵌入结果.

最后, 如果 $p=1$ 而且 $m=n$, 根据引理 5.8 和通过一个非奇异的线性变换, 对任何平行多面体 $P \subset \Omega$, 我们有 $W^{n,1}(P) \to C^0(\bar{P})$, 嵌入常数只依赖于 n 和 P 的大小. 因此, 由于分解 $\Omega = \bigcup \Omega_{\lambda,j}$, 有 $W^{n,1}(\Omega) \to C^0_B(\Omega)$. ▌

现在我们已经对 $k=n$ 的情形证明了定理 5.4 第一部分的情形 A 和 B, 在通过研究迹嵌入的方法来完成其它情形($k<n$)的证明之前, 我们先来证明连续函数空间的嵌入, 即第 I 部分情形C 和第 II 部分.

5.15 引理 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有锥性质的区域. 如果 $mp>n$, 则 $W^{m,p}(\Omega) \to C^0_B(\Omega)$, 嵌入常数只依赖于 m, p, n 和决定Ω的锥

性质的锥 C.

证明 假定对任何 $\phi\in C^{\infty}(\Omega)$ 我们能证明

$$\sup_{x\in\Omega}|\phi(x)|\leqslant K\|\phi\|_{m,p,\Omega}, \tag{25}$$

其中 $K=K(m,p,n,C)$. 那么如果 $u\in W^{m,p}(\Omega)$, 则根据定理 3.16, 在 $C^{\infty}(\Omega)$ 中有一个序列 $\{\phi_n\}$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 的范数下收敛到 u. 因为 $\{\phi_n\}$ 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列, (25) 式蕴涵着 $\{\phi_n\}$ 收敛到 Ω 上的一个连续函数. 因此 u 一定和 $C_B^0(\Omega)$ 中的一个函数 a. e. 相等. 所以只要证明 (25) 就够了.

首先假定 $m=1$, 因而 $p>n$. 设 $x\in\Omega$, 又设 $C_x\subset\Omega$ 是一个顶点在 x 的和 C 全等的有限锥. 设 h 是 C 的高. 设 $(r,\ \theta)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中原点在 x 的球极坐标, 因而 C_x 是由 $0<r<h$, $\theta\in A$ 所规定的锥. 在这种坐标系里的体积元素表为 $r^{n-1}\omega(\theta)drd\theta$. 我们有

$$\phi(x)=\phi(0,\theta)=\phi(r,\theta)-\int_0^r\frac{d}{dt}\phi(t,\theta)dt,$$

由此得出, 对 $0<r<h$,

$$|\phi(x)|\leqslant|\phi(r,\theta)|+\int_0^h|\mathrm{grad}\,\phi(t,\theta)|dt.$$

用 $r^{n-1}\omega(\theta)$ 乘这个不等式的两边, 并对 r 在 $(0,h)$ 上积分以及对 θ 在 A 上积分, 得到

$$\begin{aligned}(\mathrm{vol}C_x)|\phi(x)|&\leqslant\int_{C_x}|\phi(y)|dy+\frac{h^n}{n}\int_{C_x}\frac{|\mathrm{grad}\,\phi(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy\\&\leqslant(\mathrm{vol}C_x)^{1/p'}\|\phi\|_{0,p,C_x}\\&\quad+\frac{h^n}{n}\|\mathrm{grad}\,\phi\|_{0,p,C_x}\left|\int_{C_x}|x-y|^{-(n-1)p'}dy\right|^{1/p'},\end{aligned}$$

最后的不等式是由两次应用 Hölder 不等式得到的. 因为 $p>n$, 有 $(n-1)(1-p')>-1$, 所以

$$\int_{C_x}|x-y|^{-(n-1)p'}dy=\int_A\omega(\theta)d\theta\int_0^h r^{(n-1)(1-p')}dr<\infty.$$

因此

$$|\phi(x)|\leqslant K\|\phi\|_{1,p,C_x}\leqslant K\|\phi\|_{1,p,\Omega},$$

$K=K(m, p, n, C_x)=K(m, p, n, C)$. 因此对 $m=1$ 的情形证明了 (25)式.

如果 $m>1$ 但 $p>n$, 我们仍有

$$|\phi(x)|\leqslant K\|\phi\|_{1,p,C_x}\leqslant K\|\phi\|_{m,p,C_x}\leqslant K\|\phi\|_{m,p,\Omega}.$$

如果 $p\leqslant n<mp$, 则存在一个满足 $1\leqslant j\leqslant m-1$ 的整数 j 使得 $jp\leqslant n<(j+1)p$. 如果 $jp<n$, 令 $r=np/(n-jp)$; 如果 $jp=n$, 选 $r>\max(n, p)$. 无论那种情形, 根据上面已经证明的结果和引理 5.14 我们有

$$\begin{aligned}|\phi(x)|&\leqslant K_1\|\phi\|_{1,r,C_x}\leqslant K_1\|\phi\|_{m-j,r,C_x}\\&\leqslant K\|\phi\|_{m,p,C_x}\leqslant K\|\phi\|_{m,p,\Omega}.\end{aligned}$$

常数只依赖于 m, p, n 和 C. 这就完成了证明. ▮

5.16 推论 如果 $mp>n$, 则对于 $p\leqslant q\leqslant\infty$, $W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$. 嵌入常数只依赖于 m, p, n, q 和锥 C.

证明 我们已经证明对所有的 $u\in W^{m,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{0,\infty,\Omega}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|u(x)|\leqslant K\|u\|_{m,p,\Omega}.$$

如果 $p\leqslant q<\infty$, 我们有

$$\begin{aligned}\|u\|_{0,q,\Omega}^q&=\int_\Omega|u(x)|^p|u(x)|^{q-p}dx\\&\leqslant K^{q-p}\|u\|_{m,p,\Omega}^{q-p}\|u\|_{0,p,\Omega}^p\leqslant K^{q-p}\|u\|_{m,p,\Omega}^q.\end{aligned}$$ ▮

5.17 引理 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有强局部 Lipschitz 性质的区域, 又假定 $mp>n\geqslant(m-1)p$. 那么对于

(i) $0<\lambda\leqslant m-n/p$(若 $n>(m-1)p$), 或

(ii) $0<\lambda<1$(若 $n=(m-1)p$), 或

(iii) $0<\lambda\leqslant 1$(若 $p=1, n=m-1$),

有 $W^{m,p}(\Omega)\to C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$. 特别有 $W^{m,p}(\Omega)\to C^0(\overline{\Omega})$. 嵌入常数依赖于 m, p, n 和描述 Ω 的强局部 Lipschitz 性质中规定的参数 δ, M

(见 4.5 节).

证明 设 $u\in W^{m,p}(\Omega)$. 强局部 Lipschitz 性质蕴涵着锥性质, 所以根据引理 5.15, 我们可以假定 u 在 Ω 上连续而且满足

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)|\leqslant K_1\|u\|_{m,p,\Omega}. \tag{26}$$

所以只要进一步证明对适当的 λ

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\leqslant K_2\|u\|_{m,p,\Omega} \tag{27}$$

就行了.

因为 $mp>n\geqslant(m-1)p$, 根据引理 5.14, 有 $W^{m,p}(\Omega)\to W^{1,r}(\Omega)$, 其中

(i) 如果 $n>(m-1)p$, 则 $r=np/(n-mp+p)$ 且 $1-(n/r)=m-(n/p)$, 或者

(ii) 如果 $n=(m-1)p$, 则取 r 使得 $p<r<\infty$ 而且 $0<1-(n/r)<1$, 或者

(iii) 如果 $p=1$ 且 $n=m-1$, 则取 $r=\infty$, $1-(n/r)=m-(n/p)=1$,

所以只要对 $m=1$ 证明(27)就够了; 即, 我们要证明如果 $n<p\leqslant\infty$ 而且 $0<\lambda\leqslant 1-(n/p)$, 则

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\leqslant K_3\|u\|_{1,p,\Omega}. \tag{28}$$

暂时假定 Ω 是一个立方体, 不失一般性我们还可以假定其边长为 1. 对 $0<t<1$, Ω_t 表示其表面和 Ω 的表面平行, 边长为 t 的立方体, 且使 $\overline{\Omega}_t\subset\Omega$. 设 $u\in C^{\infty}(\Omega)$.

设 $x,y\in\Omega$, $|x-y|=\sigma<1$. 则存在一个固定的立方体 Ω_σ, $x,y\in\overline{\Omega}_\sigma\subset\Omega$. 如果 $z\in\Omega_\sigma$, 则

$$u(x)=u(z)-\int_0^1\frac{d}{dt}u(x+t(z-x))\,dt,$$

所以

$$|u(x)-u(z)|\leqslant\sqrt{n}\,\sigma\int_0^1|\mathrm{grad}u(x+t(z-x))|dt.$$

因此

$$\left|u(x)-\frac{1}{\sigma^n}\int_{\Omega_\sigma}u(z)dz\right|\leqslant\left|\frac{1}{\sigma^n}\int_{\Omega_\sigma}(u(x)-u(z))dz\right|$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{n}}{\sigma^{n-1}}\int_{\Omega_\sigma}dz\int_0^1|\mathrm{grad}u(x+t(z-x))|dt$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{\sigma^{n-1}}\int_0^1 t^{-n}dt\int_{\Omega_{t\sigma}}|\mathrm{grad}u(z)|dz$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{n}}{\sigma^{n-1}}\|\mathrm{grad}u\|_{0,p,\Omega}\int_0^1(\mathrm{vol}\,\Omega_{t\sigma})^{1/p'}t^{-n}dt \tag{29}$$

$$\leqslant K_4\sigma^{1-(n/p)}\|\mathrm{grad}u\|_{0,p,\Omega},$$

其中 $K_4=K_4(n,\ p)=\sqrt{n}\int_0^1 t^{-n/p}dt<\infty$. 用 y 代替 x 就有一个类似的不等式, 所以

$$|u(x)-u(y)|\leqslant 2K_4|x-y|^{1-(n/p)}\|\mathrm{grad}u\|_{0,p,\Omega}.$$

对于Ω是一个立方体的情形, 对于 $0<\lambda\leqslant 1-(n/p)$ (28) 式成立, 所以, 通过一个非奇异的线性变换知道当Ω是一个平行多面体的情形, (28)式也成立.

现在假定Ω具有强局部 Lipschitz 性质. 设 $\delta, M,\ \Omega_\delta, U_j$ 和 $\mathscr{V}_j$ 如同在 4.5 节中规定的一样. 存在一个直径为δ 的平行多面体 P, P 的大小只依赖于 δ 和M, 使得对于每个 j 对应一个与P全等的且有一个顶点在原点的平行多面体 P_j,使得对一切 $x\in\mathscr{V}_j\cap\Omega$ 我们有 $x+P_j\subset\Omega$. 而且存在只依赖于 δ 和P的常数 δ_0 和δ_1, $\delta_0\leqslant\delta$, 使得若 $x, y\in\mathscr{V}_j\cap\Omega$ 和$|x-y|<\delta_0$, 则存在 $z\in(x+P_j)\cap(y+P_j)$, 其中$|x-z|+|y-z|\leqslant\delta_1|x-y|$. 把(28)式应用到 $x+P_j$ 和 $y+P_j$ 上去就得到: 如果 $u\in C^\infty(\Omega)$, 则

$$|u(x)-u(y)|\leqslant|u(x)-u(z)|+|u(y)-u(z)|$$

$$\leqslant K_5|x-z|^\lambda\|u\|_{1,p,\Omega}$$

$$+K_5|y-z|^\lambda\|u\|_{1,p,\Omega}$$

$$\leqslant 2^{1-\lambda}K_5\delta_1^\lambda\ |x-y|^\lambda\|u\|_{1,p,\Omega}. \tag{30}$$

现在设 $x,y\in\Omega$ 是任意的．如果 $|x-y|<\delta_0\leqslant\delta$, $x,y\in\Omega_\delta$, 则对于某个 j 有 $x,y\in\mathscr{V}_j$, 从而估计式(30)成立．如果 $|x-y|<\delta_0$, $x\in\Omega_\delta$, $y\in\Omega\sim\Omega_\delta$, 则对某个 j, $x\in\mathscr{V}_j$ 而且把(28)式再次应用到 $x+P_j$ 和 $y+P_j$ 上去就得到(30)．如果 $|x-y|<\delta_0$ 而且 $x,y\in\Omega\sim\Omega_\delta$, 则把(28)式应用到 $x+P'$, $y+P'$ 上去就得到(30), 其中 P' 是任何和 P 全等的, 有一个顶点在原点的平行多面体．最后, 如果 $|x-y|\geqslant\delta_0$, 则有

$$|u(x)-u(y)|\leqslant|u(x)|+|u(y)|$$

$$\leqslant K_6\|u\|_{1,p,\Omega}\leqslant K_6\delta_0^{-\lambda}|x-y|^\lambda\|u\|_{1,p,\Omega}$$

这就对 $u\in C^\infty(\Omega)$ 完成了(28)的证明．所以根据定理 3.16, 对于所有的连续函数, (28)式也对．▌

现在, 除定理 5.4 情形 A 和 B (相应于 $k<n$) 的迹嵌入外, 我们已经证明了嵌入定理 5.4．为了证明迹嵌入, 我们需要下面的内插结果．

5.18 引理 设 Q 是 $\mathbf{R}^n$ 中边长为 l, 其边平行于坐标轴的立方体．如果 $p>1$, $q\geqslant 1$ 以及 $mp-p<n<mp$, 则存在常数 $K=K(p,q,m,n,l)$ 使得对一切 $u\in W^{m,p}(Q)$ (在 Q 中 a.e.) 有

$$|u(x)|\leqslant K\|u\|_{0,q,Q}^s\|u\|_{m,p,Q}^{1-s}, \tag{31}$$

其中 $s=(mp-n)q/[np+(mp-n)q]$.

证明 只要对 $u\in C^\infty(\bar{Q})$ 证明(31)就行了．由于 $\bar{Q}$ 的每一点是一个包含在 $\bar{Q}$ 中, 其边和 Q 的边平行而且边长为 $\dfrac{l}{2}$ 的立方体的角点, 不失一般性我们可以假定 x 本身是 Q 的一个角点, 比如说 $Q=\{y\in\mathbf{R}^n:\ x_i<y_i<x_i+l;\ 1\leqslant i\leqslant n\}$.

根据引理 5.17, 对于 $y\in Q$ 我们有

$$|u(x)|-|u(y)|\leqslant|u(x)-u(y)|\leqslant K_1|x-y|^{m-(n/p)}\|u\|_{m,p,Q}. \tag{32}$$

设$U=\|u\|_{m,p,Q}$，我们可以假定U是正的；设 $\rho=|x-y|$ 而 $\zeta=[|u(x)|/K_1U]^{p/(mp-n)}$. 暂时假定 $\zeta\leqslant l$. 对于 $\rho\leqslant\zeta$ 我们有

$$|u(y)|\geqslant|u(x)|-K_1U\rho^{m-(n/p)}\geqslant 0.$$

把上面的不等式取 p 幂，在 Q 上对 y 积分得到

$$\begin{aligned}\int_Q|u(y)|^q dy&\geqslant K_2\int_0^\zeta(|u(x)|-K_1U\rho^{m-(n/p)})^q\rho^{n-1}d\rho\\&=K_2\zeta^n|u(x)|^q\int_0^1(1-\sigma^{m-(n/p)})^q\sigma^{n-1}d\sigma\\&=K_3|u(x)|^{q+(np/(mp-n))}U^{-np/(mp-n)},\end{aligned}$$

由此立即得到(31).

另一方面，如果 $\zeta>l$，则从(32)我们得到

$$\begin{aligned}|u(y)|&\geqslant|u(x)|-K_1U\rho^{m-(n/p)}\\&\geqslant|u(x)|-|u(x)|(\rho/l)^{m-(n/p)}\\&\geqslant 0\qquad \text{当 } \rho\leqslant l.\end{aligned}$$

如果 $t>0$，则

$$\begin{aligned}\int_Q|u(y)|^t dy&\geqslant K_2\int_0^l|u(x)|^t(1-(\rho/l)^{m-(n/p)})^t\rho^{n-1}d\rho\\&=K_4|u(x)|^t\end{aligned}$$

令 $t=[(mp-n)q+np]/mp$. 则用一下 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}&|u(x)|^{[(mp-n)q+np]/mp}\\&\leqslant(1/K_4)\int_\Omega[|u(y)|^q]^{(mp-n)/mp}[|u(y)|^p]^{n/mp}dy\\&\leqslant(1/K_4)\|u\|_{0,q,\Omega}^{q(mp-n)/mp}\|u\|_{0,p,\Omega}^{n/m}.\end{aligned}$$

因为$\|u\|_{0,p,\Omega}\leqslant\|u\|_{m,p,\Omega}$，所以立即得到(31)式. ∎

我们指出：对 $p=1, m=n$ 的情形，上面的引理还成立. 这时从引理 5.14 我们可得 $W^{n,1}(\Omega)\to L^\infty(\Omega)$，所以在$Q$中$|u(x)|\leqslant K\|u\|_{n,1,Q}$ a. e.，这就是 $p=1, m=n$ 时的(31)式.

5.19 引理 设Ω是$\mathbf{R}^n$中具有锥性质的区域，又设Ω^k表示Ω和某个k维平面的交，其中$1\leqslant k\leqslant n(\Omega^n\equiv\Omega)$. 如果$n\geqslant mp$且$n-mp<k\leqslant n$，那么

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega^k), \tag{33}$$

其中当$n>mp$时$p\leqslant q\leqslant kp/(n-mp)$，或者当$n=mp$时$p\leqslant q<\infty$. 如果$p=1, n>m$，而且$n-m\leqslant k\leqslant n$，则对于$1\leqslant q\leqslant k/(n-m)$，(33)式成立.

嵌入常数只依赖于m, p, k, n, q和决定Ω的锥性质的锥C.

证明 只要对有界区域Ω，$n>mp$和$q=kp/(n-mp)$的情形证明上述结论就行了，因为用推论5.13和引理5.14中对$k=n$的情形所用的同样的方法就可把结论推广到其它情形. 和引理5.10的证明一样，我们还可以假定Ω是边长为2单位的坐标立方体的并集.

设$\mathbf{R}_0^k$是$\mathbf{R}^n$的一个k维坐标子空间，Ω^k在$\mathbf{R}_0^k$上有一个一对一的投影Ω_0^k. 暂时假定$p>1$. 设ν是小于mp的最大整数. 那么$mp-p<\nu<mp$而且由于$n-mp<k$我们有$n-\nu\leqslant k$. (注意如果$p=1$，对$k=n-m, \nu=m$，同样的结论成立.) 设$\mu=\binom{k}{n-\nu}$又设$E_i(1\leqslant i\leqslant\mu)$表示维数为$n-\nu$的$\mathbf{R}_0^k$的各种坐标子空间. 设$\Omega_i$表示$\Omega_0^k$(因此$\Omega^k$)在$E_i$上的投影. 还有，对每个$x\in\Omega_i$设$\Omega_{i,x}$表示$\Omega$和通过$x$点垂直于$E_i$的$\nu$维平面的交. 于是$\Omega_{i,x}$包含一个边长为单位，有一个顶点在$x$的$\nu$维坐标立方体. 根据引理5.18，对于$q=q_0=np/(n-mp)$，对于$u\in C^\infty(\Omega)$我们有

$$\sup_{y\in\Omega_{i,x}}|u(y)|^{(n-\nu)p/(n-mp)}\leqslant K_1\|u\|_{0,q_0,\Omega_{i,x}}^{(mp-\nu)q_0/mp}\|u\|_{m,p,\Omega_{i,x}}^{\nu/m}. \tag{34}$$

设dx^i和dx_*^i分别表示E_i和E_i的正交余集中的体积元素. 将(34)式在Ω_i上积分，利用Hölder不等式就导致

$$\int_{\Omega_i}\sup_{y\in\Omega_{i,x}}|u(y)|^{(n-\nu)p/(n-mp)}dx^i$$

$$\leqslant K_1 \int_{\Omega_i} \left[\int_{\Omega_{i,x}} |u(x)|^{q_0} dx_*^i \right]^{(mp-\nu)/mp}$$

$$\times \left[\int_{\Omega_{i,x}} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u(x)|^p dx_*^i \right]^{\nu/mp} dx^i$$

$$\leqslant K_1 \left[\int_\Omega |u(x)|^{q_0} dx \right]^{(mp-\nu)/mp}$$

$$\times \left[\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u(x)|^p dx \right]^{\nu/mp}$$

$$= K_1 \|u\|_{0,q_0,\Omega}^{q_0(mp-\nu)/mp} \|u\|_{m,p,\Omega}^{\nu/m}. \tag{35}$$

最后，把引理 5.9 应用到 $\mathbf{R}_0^k$ 的子空间 E_i 上去. 注意到引理 5.9 中的常数 λ 在这里等于 $\binom{k-1}{n-\nu-1}$. 令 $dx^{(k)}$ 表示 $\mathbf{R}_0^k$ 中的体积元素，而令 $q=kp/(n-mp)$，我们得到

$$\|u\|_{0,q,\Omega^k}^q \leqslant K_2 \int_{\Omega_0^k} \prod_{i=1}^{\mu} \sup_{y \in \Omega_{i,x}} |u(y)|^{q/\mu} dx^{(k)}$$

$$\leqslant K_2 \prod_{i=1}^{\mu} \left[\int_{\Omega_i} \sup_{y \in \Omega_{i,x}} |u(y)|^{q\lambda/\mu} dx^i \right]^{1/\lambda}. \tag{36}$$

因为 $q\lambda/\mu=(n-\nu)p/(n-mp)$，从(35)和(36)以及引理 5.14 得到

$$\|u\|_{0,q,\Omega^k} \leqslant K_3 \prod_{i=1}^{\mu} \|u\|_{0,q_0,\Omega}^{q_0(mp-\nu)/mp\lambda q} \|u\|_{m,p,\Omega}^{\nu/m\lambda q}$$

$$\leqslant K_4 \left[\|u\|_{m,p,\Omega}^{q_0(mp-\nu)/mp} \|u\|_{m,p,\Omega}^{\nu/m} \right]^{\mu/\lambda q} = K_4 \|u\|_{m,p,\Omega}.$$

这就证实了所要的嵌入定理. ▌

现在我们已完成定理 5.4 的证明.

$W^{m,p}(\Omega)$ 中的函数在 Ω 边界上的迹

5.20 研究定义在区域 Ω 上的微分算子的边值问题时，重要的问题是决定定义在 Ω 的边界上的函数空间，包括决定 $W^{m,p}(\Omega)$ 中函数 u 的迹 $u|_{\mathrm{bdry}\,\Omega}$. 例如，如果 $W^{m,p}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$，那么 $u|_{\mathrm{bdry}\,\Omega}$ 显然属于 $C(\mathrm{bdry}\,\Omega)$. 下面我们概述一个对于这种迹的 L^q 嵌入定

理，它可以作为定理 5.4 的推论而得到.

在算子 $u \to u|_{\text{bdry}\Omega}$ 作用下 $W^{m,p}(\Omega)$ 的象的表征问题为许多作者广泛地研究过. 包含分数 m 次 Sobolev 空间在内的解决方法将在第七章中给出(特别见定理 7.53). 第七章所用的方法是属于 Lions 的[37, 38].

5.21 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有一致 C^m-正则性的区域 Ω. 因此存在 bdry Ω 的一个局部有限开覆盖 $\{U_j\}$ 和相应的 m-光滑变换 $\boldsymbol{\Psi}_j$ 把 $B=\{y\in\mathbf{R}^n: |y|<1\}$ 映射到 U_j 上，使得 $U_j\cap\text{bdry}\Omega=\boldsymbol{\Psi}_j(B_0)$; $B_0=\{y\in B: y_n=0\}$. 如果 f 是一个支集在 U_j 中的函数，我们可以通过

$$\int_{\text{bdry}\Omega} f(x)d\sigma=\int_{U_j\cap\text{bdry}\Omega} f(x)d\sigma$$
$$=\int_{B_0} f\circ\boldsymbol{\Psi}_j(y',0)\mathbf{J}_j(y')dy'$$

来定义 f 在 bdryΩ 上的积分，其中 $y'=(y_1,\cdots,y_{n-1})$，而且如果 $x=\boldsymbol{\Psi}_j(y)$，则

$$\mathbf{J}_j(y')=\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial(x_1,\cdots,\hat{x}_k,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_{n-1})}\right)^2\right\}^{1/2}\Bigg|_{y_n=0}.$$

如果 f 是定义在 bdryΩ 上的任意函数，我们可以令

$$\int_{\text{bdry}\Omega} f(x)d\sigma=\sum_j\int_{\text{bdry}\Omega} f(x)v_j(x)d\sigma,$$

其中 $\{v_j\}$ 是 bdryΩ 的从属于 $\{U_j\}$ 的一个单位分解.

5.22 定理 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有一致 C^m-正则性的区域，而且假定存在一个 Ω 的简单 (m,p)-延拓算子 E. 如果 $mp<n$ 而 $p\leqslant q\leqslant(n-1)p/(n-mp)$，则

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\text{bdry}\Omega). \tag{37}$$

如果 $mp=n$，则对 $p\leqslant q<\infty$ (37) 式成立.

证明 嵌入(37)应该在下列意义下解释：如果 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，则 Eu

在 5.2 节最后一段所说的意义下有一个在 bdryΩ 上的迹，而且 $\|Eu\|_{0,q,\mathrm{bdry}\,\Omega}\leqslant K\|u\|_{m,p,\Omega}$，$K$ 与 u 无关. [注意因为 $C_0(\mathbf{R}^n)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密，$\|Eu\|_{0,q,\mathrm{bdry}\,\Omega}$ 和所用的特殊的延拓算子 E 无关.]

只要对 $mp<n$ 和 $q=(n-1)p/(n-mp)$ 证明定理就够了. 存在常数 K_1 使得对于一切 $u\in W^{m,p}(\Omega)$

$$\|Eu\|_{m,p,\mathbf{R}^n}\leqslant K_1\|u\|_{m,p,\Omega}.$$

根据一致 C^m-正则性条件(4.6 节)，存在常数 K_2，使得对每个 j 和一切 $y\in B, x=\boldsymbol{\Psi}_j(y)\in U_j$, 有

$$|J_j(y')|\leqslant K_2 \text{ 以及 } \left|\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|\leqslant K_2.$$

注意到在 $\mathbf{R}^n$ 上 $0\leqslant v_j(x)\leqslant 1$，而且把定理 5.4 的嵌入(2)用到 B 上去, 对于 $u\in W^{m,p}(\Omega)$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{bdry}\,\Omega}|Eu(x)|^q d\sigma &\leqslant\sum_j\int_{U_j\cap\mathrm{bdry}\,\Omega}|Eu(x)|^q d\sigma\\ &\leqslant K_2\sum_j\|Eu\circ\boldsymbol{\Psi}_j\|^q_{0,q,B_0}\\ &\leqslant K_3\sum_j(\|Eu\circ\boldsymbol{\Psi}_j\|^p_{m,p,B})^{q/p}\\ &\leqslant K_4\left(\sum_j\|Eu\|^p_{m,p,U_j}\right)^{q/p}\\ &\leqslant K_4 R\|Eu\|^q_{m,p,\mathbf{R}^n}\\ &\leqslant K_5\|u\|^q_{m,p,\Omega}.\end{aligned}$$

上述倒数第二个不等式利用了覆盖 $\{U_j\}$ 具有的有限交性质. 因为对所有的 i, j, $|D^\alpha\Psi_{j,i}(y)|\leqslant\mathrm{const}$, 其中 $\boldsymbol{\Psi}_j=(\Psi_{j,1},\cdots,\Psi_{j,n})$, 所以常数 K_4 和 j 无关. 这就完成了证明. ▌

作为 Bananh 代数的 $W^{m,p}(\Omega)$

给了 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的函数 u 和 v, 其中 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域，一般

说不能指望它们的逐点乘积 uv 是属于 $W^{m,p}(\Omega)$ 的. [在 Ω 中 $(uv)(x)=u(x)v(x)$ a.e..] 然而直接应用 Sobolev 嵌入定理就可证明:假如 $mp>n$ 而且 Ω 具有锥性质,则 uv 属于 $W^{m,p}(\Omega)$.

5.23 定理 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有锥性质的区域. 如果 $mp>n$, 则存在一个依赖于 m, p, n 和决定 Ω 的锥性质的有限锥 C 的常数 K^*, 使得对于所有的 $u, v\in W^{m,p}(\Omega)$, 在 Ω 中 a.e. 逐点定义的乘积 uv 属于 $W^{m,p}(\Omega)$ 而且满足

$$\|uv\|_{m,p,\Omega}\leqslant K^*\|u\|_{m,p,\Omega}\|v\|_{m,p,\Omega}. \tag{38}$$

特别地, $W^{m,p}(\Omega)$ 关于逐点相乘和等价范数

$$\|u\|^*_{m,p,\Omega}=K^*\|u\|_{m,p,\Omega}$$

是一个可交换的 Banach 代数.

证明 为了证实(38), 只要证明, 如果 $|\alpha|\leqslant m$, 则

$$\int_\Omega|D^\alpha[u(x)v(x)]|^p dx\leqslant K_\alpha\|u\|^p_{m,p,\Omega}\|v\|^p_{m,p,\Omega},$$

其中 $K_\alpha=K_\alpha(m, p, n, C)$. 我们暂时假定 $u\in C^\infty(\Omega)$. 根据广义导数的 Leibniz 法则, 即

$$D^\alpha[uv]=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta u D^{\alpha-\beta}v,$$

只要证明, 对任何的 $\beta\leqslant\alpha$, $|\alpha|\leqslant m$, 有

$$\int_\Omega|D^\beta u(x)D^{\alpha-\beta}v(x)|^p dx\leqslant K_{\alpha,\beta}\|u\|^p_{m,p,\Omega}\|v\|^p_{m,p,\Omega},$$

其中 $K_{\alpha,\beta}=K_{\alpha,\beta}(m,p,n,C)$. 根据嵌入定理, 对每个 β, $|\beta|\leqslant m$, 存在一个常数 $K(\beta)=K(\beta, m, p, n, C)$ 使得对任何 $w\in W^{m,p}(\Omega)$, 假如 $(m-|\beta|)p\leqslant n$ 和 $p\leqslant r\leqslant np/(n-(m-|\beta|)p)$ [或如果 $(m-|\beta|)p=n$ 则 $p\leqslant r<\infty$], 就有

$$\int_\Omega|D^\beta w(x)|^r dx\leqslant K(\beta)\|w\|^r_{m,p,\Omega}, \tag{39}$$

或者假如 $(m-|\beta|)p>n$, 则有

$$|D^\beta w(x)|\leqslant K(\beta)\|w\|_{m,p,\Omega}\quad \text{在}\Omega\text{中 a.e.}.$$

设 k 是使 $(m-k)p>n$ 的最大整数. 因为 $mp>n$, 所以 $k\geqslant 0$, 如果 $|\beta|\leqslant k$, 则 $(m-|\beta|)p>n$, 所以

$$\int_\Omega |D^\beta u(x)D^{\alpha-\beta}v(x)|^p dx\leqslant K(\beta)^p\|u\|^p_{m,p,\Omega}\|D^{\alpha-\beta}v\|^p_{0,p,\Omega}$$
$$\leqslant K(\beta)^p\|u\|^p_{m,p,\Omega}\|v\|^p_{m,p,\Omega}.$$

类似地, 如果 $|\alpha-\beta|\leqslant k$, 则

$$\int_\Omega |D^\beta u(x)D^{\alpha-\beta}v(x)|^p dx\leqslant K(\alpha-\beta)^p\|u\|^p_{m,p,\Omega}\|v\|^p_{m,p,\Omega}.$$

如果 $|\beta|>k$ 和 $|\alpha-\beta|>k$, 则实际上 $|\beta|\geqslant k+1$ 且 $|\alpha-\beta|\geqslant k+1$, 所以 $n\geqslant(m-|\beta|)p$ 且 $n\geqslant(m-|\alpha-\beta|)p$. 而且

$$\frac{n-(m-|\beta|)p}{n}+\frac{n-(m-|\alpha-\beta|)p}{n}$$
$$=2-\frac{(2m-|\alpha|)p}{n}<2-\frac{mp}{n}<1.$$

因此存在正数 r, r', 满足 $(1/r)+(1/r')=1$, 使得

$$p\leqslant rp<\frac{np}{n-(m-|\beta|)p},\qquad p\leqslant r'p<\frac{np}{n-(m-|\alpha-\beta|)p}.$$

因此根据 Hölder 不等式和(39)我们有

$$\int_\Omega |D^\beta u(x)D^{\alpha-\beta}v(x)|^p dx$$
$$\leqslant\left[\int_\Omega |D^\beta u(x)|^{rp}dx\right]^{1/r}\left[\int_\Omega |D^{\alpha-\beta}v(x)|^{r'p}dx\right]^{1/r'}$$
$$\leqslant[K(\beta)]^{1/r}[K(\alpha-\beta)]^{1/r'}\|u\|^p_{m,p,\Omega}\|v\|^p_{m,p,\Omega}.$$

这就对 $u\in C^\infty(\Omega)$, $v\in W^{m,p}(\Omega)$ 证明了(38)式.

如果 $u\in W^{m,p}(\Omega)$, 则根据定理3.16存在 $C^\infty(\Omega)$ 中的序列 $\{u_n\}$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中收敛到 u. 于是由上述论证 $\{u_n v\}$ 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的一个 Cauchy序列, 所以收敛到 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的一个元素 w. 因为 $mp>n$,

可以假定 u, v 在 Ω 上连续且有界．因此，当 $n\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}\|w-uv\|_{0,p,\Omega} &\leqslant \|w-u_n v\|_{0,p,\Omega}+\|(u_n-u)v\|_{0,p,\Omega}\\ &\leqslant \|w-u_n v\|_{0,p,\Omega}+\|v\|_{0,\infty,\Omega}\|u_n-u\|_{0,p,\Omega}\to 0.\end{aligned}$$

因此在 $L^p(\Omega)$ 中 $w=uv$，所以在广义函数的意义下 $w=uv$．所以在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中 $w=uv$ 而且

$$\|uv\|_{m,p,\Omega}=\|w\|_{m,p,\Omega}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\|u_n v\|_{m,p,\Omega}=\|u\|_{m,p,\Omega}\|v\|_{m,p,\Omega}$$

这就完成了定理的证明．▌

我们指出 Banach 代数 $W^{m,p}(\Omega)$ 有一个么元 (identity) 当且仅当 Ω 是有界的，即，函数 $e(x)\equiv 1$ 属于 $W^{m,p}(\Omega)$ 当且仅当 $\operatorname{vol}\Omega<\infty$，但是体积有限又具有锥性质的无界区域是不存在的．

反例和非嵌入定理

5.24 研究一下 Sobolev 嵌入定理 5.4 的陈述，读者可能会推测几个可能推广的方向．在探讨当不满足定理 5.4 中所述区域的条件时证明嵌入定理的可能性之前，我们先来构造一些例子，这些例子表明对于定理 5.4 中所考虑的区域，甚至是任何区域，定理 5.4 在某些方面给出了“最好可能”的嵌入结果．

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的任意区域，不失一般性假定原点属于 Ω．设 $R>0$ 使闭球 $\overline{B_{2R}}$ 包含在 Ω 中．(这里 $B_R=\{x\in\mathbf{R}^n:|x|<R\}$)．在下面的每一个例子中我们作一个只依赖于 $\rho=|x|$ 的函数 $u\in C^\infty(B_{3R}\sim\{0\})$．如果 $f\in C^\infty(0,\infty)$ 满足：当 $t\leqslant R$ 时 $f(t)=1$ 而当 $t\geqslant 2R$ 时 $f(t)=0$，则由

$$w(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } \rho=|x|\geqslant 3R\\ f(\rho)u(\rho) & \text{当 } 0<\rho<3R\end{cases}$$

定义的函数 w 在 Ω 中有紧支集并属于 $W^{m,p}(\Omega)$ 当且仅当 $u\in W^{m,p}(B_R)$．

5.25 例 设 k 是一整数，$1\leqslant k\leqslant n$，假定 $mp<n$ 和 $q>kp/(n-$

mp). 我们造一个 $u\in W^{m,p}(B_R)$, 但 $u\notin L^q(B_R^k)$, 其中 $B_R^k=\{x\in B_R: x_{k+1}=\cdots=x_n=0\}$. 因此当 $q>kp/(n-mp)$时, 就不可能有形如 $W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega^k)$的嵌入.

设 $u(x)=\rho^\lambda$, 其中 $\rho=|x|$而指数 λ 将在下面规定. 通过对 $|\alpha|$做归纳法容易验证

$$D^\alpha u(x)=P_\alpha(x)\rho^{\lambda-2|\alpha|}, \tag{40}$$

其中P_α是 x 的分量的$|\alpha|$次齐次多项式. 因此$|D^\alpha u(x)|\leqslant K_\alpha\rho^{\lambda-|\alpha|}$而且

$$\int_{B_R}|D^\alpha u(x)|^p dx\leqslant \text{const}\int_0^R \rho^{(\lambda-|\alpha|)p+n-1}d\rho.$$

所以假如

$$(\lambda-m)p+n>0, \tag{41}$$

则 u 属于$W^{m,p}(B_R)$. 另一方面, 如果 $\sigma=(x_1^2+\cdots+x_k^2)^{1/2}$, 则

$$\int_{B_R^k}|u(x)|^q dx_1\cdots dx_k=\text{const}\int_0^R \sigma^{\lambda q+k-1}d\sigma,$$

所以如果

$$\lambda q+k<0, \tag{42}$$

则 $u\notin L^q(B_R^k)$. 由于 $q>kp/(n-mp)$, 就能选到所要求的 λ 使得 λ 既满足(41)又满足(42). ▮

由于上面构造的函数 u 在 0 附近是无界的, 所以当 $mp<n$ 时不可能有形如$W^{m,p}(\Omega)\to C_B^0(\Omega)$的嵌入.

5.26 例 假定 $p>1$ 和 $mp=n$. 我们构造 $u\in W^{m,p}(B_R)$使得 $u\notin L^\infty(B_R)$. 因此当 $mp=n$ 而且Ω具有锥性质时,对于$p\leqslant q<\infty$成立的嵌入 $W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$ 不能推广成 $W^{m,p}(\Omega)\to L^\infty(\Omega)$ 或 $W^{m,p}(\Omega)\to C_B^0(\Omega)$, 除非 $p=1$ 和 $n=m$(参看定理 8.25).

设 $u(x)=\log(\log 4R/\rho)$, 其中 $\rho=|x|$. 显然 $u\notin L^\infty(B_R)$. 由归纳法容易验证

$$D^\alpha u(x)=\sum_{j=1}^{|\alpha|}P_{\alpha,j}(x)\rho^{-2|\alpha|}[\log(4R/\rho)]^{-j}, \tag{43}$$

其中 $P_{\alpha,j}$ 是 x 的分量的 $|\alpha|$ 次齐次多项式. 因为 $p=n/m$ 有

$$|D^\alpha u(x)|^p\leqslant\sum_{j=1}^{|\alpha|}K_{\alpha,j}\rho^{-|\alpha|n/m}[\log(4R/\rho)]^{-jp},$$

所以

$$\int_{B_R}|D^\alpha u(x)|^p dx\leqslant\text{const}\sum_{j=1}^{|\alpha|}\int_0^R[\log(4R/\rho)]^{-jp}\rho^{(-|\alpha|n/m)+n-1}d\rho.$$

如果 $|\alpha|<m$, 上述不等式的右端一定是有限的. 如果 $|\alpha|=m$. 令 $\sigma=\log(4R/\rho)$, 我们有

$$\int_{B_R}|D^\alpha u(x)|^p dx\leqslant\text{const}\sum_{j=1}^{|\alpha|}\int_{\log_4}^{\infty}\sigma^{-jp}d\sigma.$$

由于 $p>1$, 它是有限的. 因此 $u\in W^{m,p}(B_R)$. ▌

有趣的是, 对于 $mp=n$ 的情形, 上面的函数 u 与 m 和 p 的选取无关.

5.27 例 假定 $mp>n>(m-1)p$, 又设 $\lambda>m-(n/p)$. 我们构造 $u\in W^{m,p}(B_R)$ 使得 $u\notin C^{0,\lambda}(\bar{B}_R)$. 因此当 $mp>n>(m-1)p$ 和 $\lambda>m-(n/p)$ 时不可能有形如 $W^{m,p}(\Omega)\to C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ 的嵌入.

和例 5.25 一样, 取 $u(x)=\rho^\mu$, $\rho=|x|$. 假如 $\mu>m-(n/p)$ 由(41)式有 $u\in W^{m,p}(B_R)$. 现在 $|u(x)-u(0)|/|x-0|^\lambda=\rho^{\mu-\lambda}$, 所以当 $\mu<\lambda$ 时 $u\notin C^{0,\lambda}(\bar{B}_R)$. 因此如果我们选满足 $m-(n/p)<\mu<\lambda$ 的 μ, 则 u 具有所要的性质. ▌

5.28 例 假定 $(m-1)p=n$ 和 $p>1$. 我们构造 $u\in W^{m,p}(B_R)$ 使得 $u\notin C^{0,1}(\bar{B}_R)$. 因此除非 $p=1$, $m-1=n$, 当 Ω 具有强局部 Lipshitz 性质时对 $0<\lambda<1$ 成立的嵌入 $W^{m,p}(\Omega)\to C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ 不能推广到 $\lambda=1$ 的情形.

设 $u(x)=\rho\log(\log 4R/\rho)$, 其中 $\rho=|x|$. 由于当 $x\to 0$ 时,

$$|u(x)-u(0)|/|x-0|=\log(\log 4R/\rho)\to\infty,$$

显然 $u\notin C^{0,1}(\bar{B}_R)$. 由(40)和(43)我们有

$$D^\alpha u(x)=\sum_{j=1}^{|\alpha|}P_{\alpha,j}(x)\rho^{1-2|\alpha|}[\log(4R/\rho)]^{-j},$$

其中 $P_{\alpha,j}$ 是$|\alpha|$次齐次多项式. 因此

$$|D^\alpha u(x)|^p\leqslant\sum_{j=1}^{|\alpha|}k_{\alpha,j}\rho^{p(1-|\alpha|)}[\log(4R/\rho)]^{-jp}.$$

和例 5.26 一样, 由此推出 $u\in W^{m,p}(B_R)$. ▌

5.29 上面的例子表明, 除了以前明确说过的那些例子外, 甚至对于很规则的区域也可能没有定理 5.4 中所考虑的形式的嵌入. 余下的问题是要研究一下对于没有锥性质的不规则区域能否有这种形式的嵌入关系, 我们将要证明定理 5.4 能推广到某些不规则区域, 但是结论要弱一点. 不过我们首先要说明如果区域“太不规则”的话推广是不可能的.

如果Ω在无穷远变窄的话, 即如果

$$\lim_{\substack{|x|\to\infty\\ x\in\Omega}}\operatorname{dist}(x,\operatorname{bdry}\Omega)=0$$

的话, $\mathbf{R}^n$ 中的无界区域Ω可以有光滑边界而没有锥性质. 下面的定理表明对于任何这样的体积有限的无界区域 Ω定理 5.4 的第 I 和 II 部分完全失效.

5.30 定理 设Ω是 $\mathbf{R}^n$ 中体积有限的无界区域, 又设 $q>p$. 则 $W^{m,p}(\Omega)$不嵌入到 $L^q(\Omega)$中.

证明 我们构造一个函数 $u(x)$, 它只依赖于 x 到原点的距离 $\rho=|x|$, 当 ρ 增加时 $u(x)$的增长快得足以使 $u(x)\notin L^q(\Omega)$ 但仍有 $u\in W^{m,p}(\Omega)$.

不失一般性我们假定 $\operatorname{vol}\Omega=1$. 设 $A(\rho)$表示 Ω 和中心在原点半径为 r 的球面相交的曲面的面积[$(n-1)$-维测度]. 那么

$$\int_0^\infty A(\rho)d\rho=1.$$

设 $r_0=0$, 对于 $n=1,2,\cdots$ 由

$$\int_{r_n}^\infty A(\rho)d\rho=1/2^n=\int_{r_{n-1}}^{r_n} A(\rho)d\rho$$

来定义 r_n. 显然 r_n 随着 n 趋于无穷而趋于无穷. 设 $\Delta r_n=r_{n+1}-r_n$ 而且固定 ε 使得 $0<\varepsilon<[1/(mp)]-[1/(mq)]$. 一定存在一个增长的序列 $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ 使得 $\Delta r_{n_j}\geqslant 2^{-\varepsilon n_j}$. 否则除可能有有限个 n 值外的一切 n 都有 $\Delta r_n<2^{-\varepsilon n}$, 由此应该有 $\sum\limits_{n=0}^\infty \Delta r_n<\infty$, 这就导致矛盾. 为方便起见我们假定 $n_1\geqslant 1$, 所以对一切 $j, n_j\geqslant j$. 设 $a_0=0$, $a_j=r_{n_j+1}$, 和 $b_j=r_{n_j}$. 注意到 $a_{j-1}\leqslant b_j<a_j$ 而且 $a_j-b_j=\Delta r_{n_j}\geqslant 2^{-\varepsilon n_j}$.

设 f 是一个具有以下性质的 $\mathbf{R}$ 上的非负无穷可微函数:

(i) 对一切 t, $0\leqslant f(t)\leqslant 1$,

(ii) 如果 $t\leqslant 0, f(t)=0$, 如果 $t>1, f(t)=1$,

(iii) 如果$1\leqslant k\leqslant m$, 则对一切 t, $|(d/dt)^k f(t)|\leqslant M$.

如果 $x\in\Omega$ 而 $\rho=|x|$. 令

$$u(x)=\begin{cases}2^{n_{j-1}/q} & \text{对于 } a_{j-1}\leqslant\rho\leqslant b_j\\ 2^{n_{j-1}/q}+(2^{n_j/q}-2^{n_{j-1}/q})f\left(\dfrac{\rho-b_j}{a_j-b_j}\right) & \text{对于 } b_j\leqslant\rho\leqslant a_j\end{cases}$$

显然 $u(x)\in C^\infty(\Omega)$. 记 $\Omega_j=\{x\in\Omega: a_{j-1}\leqslant\rho\leqslant a_j\}$, 我们有

$$\int_{\Omega_j}|u(x)|^p dx=\left\{\int_{a_{j-1}}^{b_j}+\int_{b_j}^{a_j}\right\}[u(x)]^p A(\rho)d\rho$$

$$\leqslant 2^{n_{j-1}p/q}\int_{a_{j-1}}^\infty A(\rho)d\rho+2^{n_j p/q}\int_{b_j}^{a_j}A(\rho)d\rho$$

$$=\frac{1}{2}[2^{-n_{j-1}(1-p/q)}+2^{-n_j(1-p/q)}]\leqslant 2^{-(j-1)(1-p/q)}.$$

因为 $p<q$, 由上述不等式必然得出

$$\int_{\Omega}|u(x)|^p dx=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Omega_j}|u(x)|^p dt<\infty.$$

如果 $1\leqslant k\leqslant m$, 我们还有

$$\int_{\Omega_j}\left|\frac{d^k u}{dx^k}\right|^p dx=\int_{b_j}^{a_j}\left|\frac{d^k u}{d\rho^k}\right|^p A(\rho)d\rho$$

$$\leqslant M^p 2^{n_j p/q}[a_j-b_j]^{-kp}\int_{b_j}^{a_j}A(\rho)d\rho$$

$$=\frac{1}{2}M^p 2^{-n_j(1-p/q-\varepsilon kp)}\leqslant\frac{1}{2}M^p 2^{-Cn_j},$$

其中 $C=1-p/q-\varepsilon kp$, 因为 $\varepsilon<[1/(mp)]-[1/(mq)]$, 所以 $C>0$. 因此对于 $|\alpha|\leqslant m$, $D^\alpha u\in L^p(\Omega)$, 这就是说 $u\in W^{m,p}(\Omega)$. 可是, $u\notin L^q(\Omega)$, 因为对于每个 j 我们有

$$\int_{\Omega_j}|u(x)|^q dx\geqslant 2^{n_{j-1}}\int_{a_{j-1}}^{a_j}A(\rho)d\rho$$

$$=2^{n_{j-1}}[2^{-n_{j-1}-1}-2^{-n_j-1}]\geqslant\frac{1}{4},$$

所以 $W^{m,p}(\Omega)$ 不可能嵌入到 $L^q(\Omega)$ 中去. ▌

上述定理的结论能推广到体积无限但满足

$$\limsup_{N\to\infty}\operatorname{vol}\{x\in\Omega: N\leqslant|x|\leqslant N+1\}=0$$

的无界区域 Ω 上去(见 6.35 节).

5.31 对于有很尖的边界尖点的区域定理 5.4 的第 I 和第 II 部分也完全失效. 如果 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域而 x_0 是 Ω 边界上的一点, 设 $B_r=B_r(x_0)$ 表示中心在 x_0 半径为 r 的一个开球, 设 $\Omega_r=B_r\cap\Omega$, 设 $S_r=(\text{bdry}B_r)\cap\Omega$, 又设 $A(r,\Omega)$ 是 S_r 的曲面面积[$(n-1)$ 维测度]. 如果对于任何实数 k, 有

$$\lim_{r\to 0+}\frac{A(r,\Omega)}{r^k}=0, \tag{44}$$

我们就说 Ω 在 $x_0\in\text{bdry}\,\Omega$ 有一个指数尖点(exponential cusp).

5.32 定理 如果 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域, Ω 在 $\text{bdry}\,\Omega$ 上有一个指数

尖点 x_0，又如果 $q>p$，则 $W^{m,p}(\Omega)$ 不嵌入到 $L^q(\Omega)$ 中.

证明 我们构造 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 但不属于 $L^q(\Omega)$，因为 $|u(x)|^q$ 在 x_0 附近很快变为无界. 不失一般性我们可以假定 $x_0=0$，所以 $\rho=|x|$，设 $\Omega^*=\{y=x/|x|^2: x\in\Omega, |x|<1\}$. 易见 Ω^* 是无界的且有有限体积，而且

$$A(r, \Omega^*)=r^{2(n-1)}A(1/r, \Omega).$$

设 t 满足 $p<t<q$. 根据定理5.30，存在一个函数 $\tilde{v}\in C^m(0,\infty)$ 使得

(i) 如果 $0<r\leqslant 1$，则 $\tilde{v}(r)=0$，

(ii) 如果 $0\leqslant j\leqslant m$，则 $\int_1^\infty |v^{(j)}(r)|^t A(r,\Omega^*)dr<\infty$，

(iii) $\int_1^\infty |\tilde{v}(r)|^q A(r,\Omega^*)dr=\infty$.

[如果 $r=|y|$，则 $v(y)=\tilde{v}(r)$ 定义 $v\in W^{m,p}(\Omega^*)$ 但是 $v\notin L^q(\Omega^*)$.]

设 $x=y/|y|^2$，所以 $\rho=|x|=1/|y|=1/r$. 令 $\lambda=2n/q$，定义 $u(x)=\tilde{u}(\rho)=r^\lambda\tilde{v}(r)=|y|^\lambda v(y)$. 由此可见对于 $|\alpha|=j\leqslant m$

$$|D^\alpha u(x)|\leqslant|\tilde{u}^{(j)}(\rho)|\leqslant\sum_{i=0}^{j}c_{ij}r^{\lambda+j+i}\tilde{v}^{(i)}(r),$$

其中系数 c_{ij} 只依赖于 λ. 现在对 $|x|\geqslant 1$，$u(x)$ 等于 0，所以

$$\int_\Omega |u(x)|^q dx=\int_0^1 |\tilde{u}(\rho)|^q A(\rho,\Omega)d\rho$$

$$=\int_1^\infty |\tilde{v}(r)|^q A(r,\Omega^*)dr=\infty.$$

另一方面，如果 $0\leqslant|\alpha|=j\leqslant m$，我们有

$$\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx\leqslant\int_0^1 |\tilde{u}^{(j)}(\rho)|^p A(\rho,\Omega)d\rho$$

$$\leqslant \text{const}\sum_{i=0}^{j}\int_1^\infty |\tilde{v}^{(i)}(r)|^p r^{(\lambda+j+i)p-2n}A(r,\Omega^*)dr. \tag{45}$$

如果$(\lambda+2m)p\leqslant 2n$，则由于$p<t$和$\mathrm{vol}\Omega^*<\infty$，通过应用 Hölder 不等式就知道(45)中所有的积分都是有限的，所以$u\in W^{m,p}(\Omega)$。否则，设

$$k=[(\lambda+2m)p-2n][t/(t-p)]+2n.$$

由(44)存在$a\leqslant 1$使得如果$\rho\leqslant a$，则$A(\rho,\Omega)\leqslant\rho^k$。由此得到，如果$r\geqslant 1/a$，则

$$r^{k-2n}A(r,\Omega^*)\leqslant r^{k-2}\rho^k=r^{-2}.$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty|\tilde{v}^{(i)}(r)|^p r^{(\lambda+j+i)p-2n}A(r,\Omega^*)dr\\&=\int_1^\infty|\tilde{v}^{(i)}(r)|^p r^{(k-2n)(t-p)/t}A(r,\Omega^*)dr\\&\leqslant\left\{\int_1^\infty|\tilde{v}^{(i)}(r)|^t A(r,\Omega^*)dr\right\}^{p/t}\left\{\int_1^\infty r^{k-2n}A(r,\Omega^*)dr\right\}^{(t-p)/t},\end{aligned}$$

它是有限的．因此$u\in W^{m,p}(\Omega)$，从而完成了证明．▌

有尖点区域的嵌入定理

5.33 已经证明对于很不规则的区域定理 5.4 完全失效，现在我们要证明对于虽然没有锥性质但不是太不规则的区域定理 5.4 中所考虑的某些类型的嵌入是成立的．这类问题曾为一些作者研究过，例如可以看 Globenko[26, 27]和 Maz'ja[44, 45]的工作，下面给出的处理方法是本书作者在一篇论文[1]中所给出的．

我们考虑区域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$，$\Omega$的边界仅仅是由$(n-1)$维曲面构成的，又假定$\Omega$位于边界的一侧．$x_0\in\mathrm{bdry}\,\Omega$，如果不可能存在顶点在$x_0$，体积为正又包含在$\Omega$中的有限开锥的话，就说$\Omega$在$x_0\in\mathrm{bdry}\,\Omega$处有一个尖点(cusp)．当然区域$\Omega$没有任何尖点也并不蕴涵着$\Omega$具有锥性质．我们暂时考虑叫做标准尖点(standard cusps)区域的一族特殊区域，这些区域具有幂尖性的尖点(cusps of

power sharpness) (不如指数尖点 (cusps of exponential sharpness)那么尖的尖点).

5.34 如果 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 而 $\lambda>1$, 设 $Q_{k,\lambda}$ 表示由不等式

$$\begin{gathered} x_1^2+\cdots+x_k^2<x_{k+1}^{2\lambda}, \quad x_{k+1}>0, \cdots, x_n>0, \\ (x_1^2+\cdots+x_k^2)^{1/\lambda}+x_{k+1}^2+\cdots+x_n^2<a^2, \end{gathered} \tag{46}$$

规定的 $\mathbf{R}^n$ 中的标准尖点区域, 其中 a 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有单位体积的球的半径. 我们注意到 $a<1$, $Q_{k,\lambda}$ 具有由 $x_{k+1}, \cdots, x_n$ 轴张起来的轴向平面和由 $x_{k+2}, \cdots, x_n$ 轴张起来的垂直平面(尖点平面). 如果 $k=n-1$, 只有原点是 $Q_{k,\lambda}$ 的顶点. 为了计算简单起见把 $Q_{k,\lambda}$ 的外边界曲面取成(46)的形式. 球面或者不包括原点的适当的有界曲面都可以作为外表面.

与标准尖点区域 $Q_{k,\lambda}$ 相对应, 我们考虑一个借助于笛卡尔坐标, 由

$$\begin{gathered} y_1^2+\cdots+y_k^2<y_{k+1}^2, y_{k+1}>0, \cdots, y_n>0, \\ y_1^2+\cdots+y_n^2<a^2 \end{gathered}$$

所规定的与 $Q_{k,\lambda}$ 相应的标准锥 $Q_k=Q_{k,1}$. 图 4 说明在 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 中的标准尖点区域和与其相应的标准锥. 在 $\mathbf{R}^3$ 中尖点区域 $Q_{2,2}$ 只有一个尖点在原点, 而 $Q_{1,2}$ 有一条沿着 x_3 轴的尖点线.

在 $\mathbf{R}^n$ 中采用广义"柱"坐标$(r_k, \phi_1, \cdots, \phi_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n)$是方便的, $r_k\geqslant 0$, $-\pi\leqslant\phi_1\leqslant\pi$, $0\leqslant\phi_2, \cdots, \phi_{k-1}\leqslant\pi$, 而

$$\begin{aligned} y_1 &= r_k\sin\phi_1\sin\phi_2\cdots\sin\phi_{k-1}, \\ y_2 &= r_k\cos\phi_1\sin\phi_2\cdots\sin\phi_{k-1}, \\ y_3 &= \qquad r_k\cos\phi_2\cdots\sin\phi_{k-1}, \\ &\vdots \\ y_k &= \qquad\qquad r_k\cos\phi_{k-1}, \end{aligned} \tag{47}$$

利用这些坐标, Q_k 表为

$$\begin{gathered} 0\leqslant r_k<y_{k+1}, y_{k+1}>0, \cdots, y_n>0, \\ r_k^2+y_{k+1}^2+\cdots+y_n^2<a^2. \end{gathered}$$

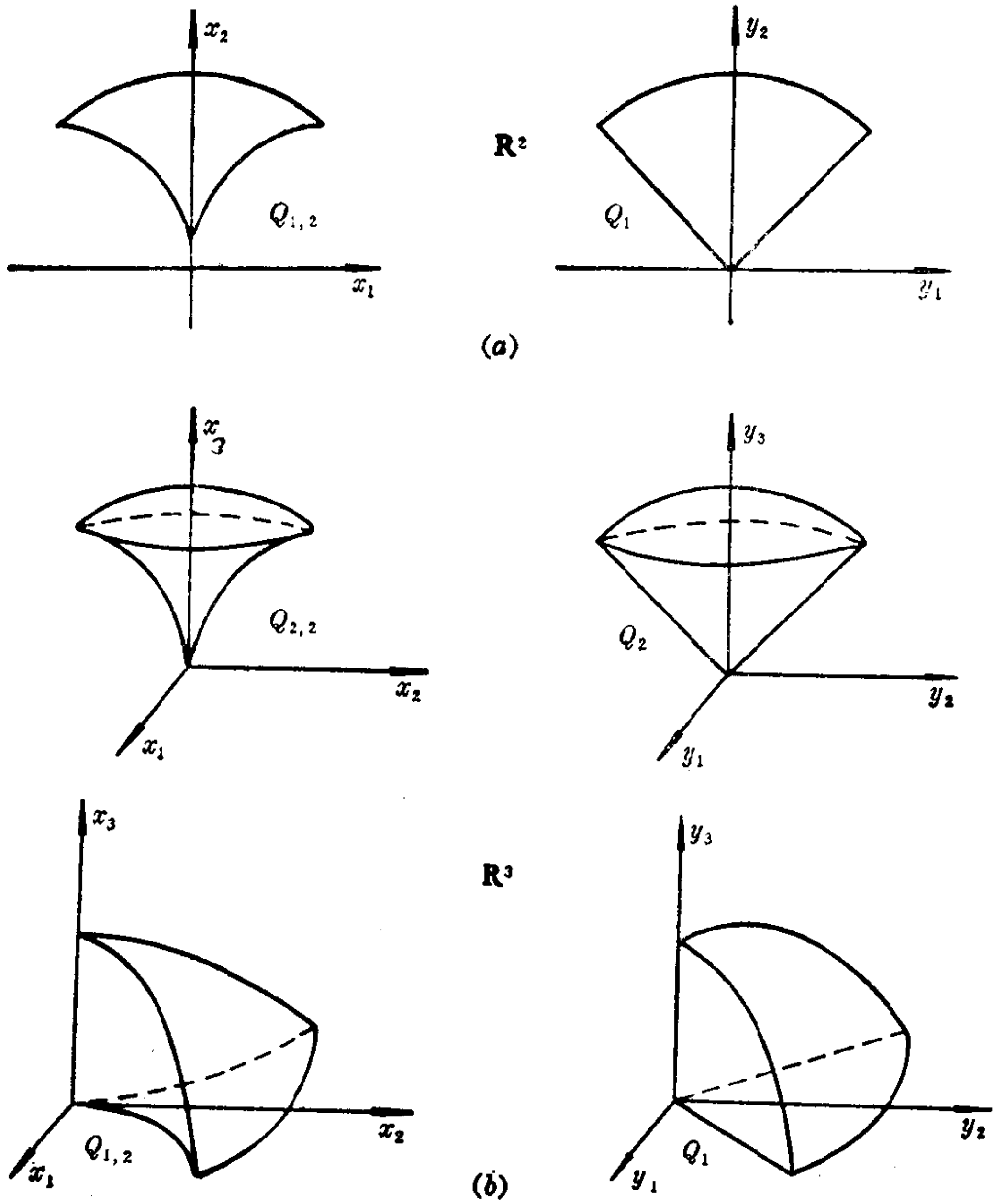


图 4. $\mathbf{R}^2$ 中(a)和 $\mathbf{R}^3$ 中(b)的标准尖点区域和标准锥

利用一对一的变换

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r_k^\lambda \sin\phi_1 \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{k-1},\\
x_2 &= r_k^\lambda \cos\phi_1 \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{k-1},\\
x_3 &= \qquad r_k^\lambda \cos\phi_2 \cdots \sin\phi_{k-1},\\
&\vdots\\
x_k &= \qquad\qquad r_k^\lambda \cos\phi_{k-1},
\end{aligned}
\tag{48}
$$

$$x_{k+1}=y_{k+1}$$

$$\vdots$$

$$x_n=y_n$$

可以把标准尖点区域 $Q_{k,\lambda}$ 变换到与之相应的锥 Q_k 中去，(48) 的 Jacobi 行列式为

$$\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\right|=\lambda r_k^{(\lambda-1)k}. \tag{49}$$

现在我们叙述三个定理，它们把定理 5.4 中考虑的嵌入类型(除迹嵌入外)推广到可与标准尖点区域相比较的边界不规则的区域. 这些定理的证明将在本章后面给出.

5.35 定理 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有下列性质的区域：存在 Ω 的一族开子集合 Γ 使得

(i) $\Omega=\bigcup_{G\in\Gamma}G$;

(ii) Γ 具有有限交性质，即存在正整数 N 使得 Γ 中任意 $N+1$ 个不同的集合的交为空集；

(iii) 至多有一个集合 $G\in\Gamma$ 具有锥性质；

(iv) 存在正常数 $\nu>mp-n$ 和 A，使得对于任何没有锥性质的 $G\in\Gamma$ 存在一个一对一的函数 ψ 把 G 映到一个标准的尖点区域 $Q_{k,\lambda}$ 上去，其中 $(\lambda-1)k\leqslant\nu$，且使得对于所有的 $i,j(1\leqslant i,j\leqslant n)$，所有的 $x\in G$ 和所有的 $y\in Q_{k,\lambda}$，有

$$\left|\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}\right|\leqslant A \quad 和 \quad \left|\frac{\partial(\psi^{-1})_j}{\partial y_i}\right|\leqslant A.$$

于是

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega),$$

$$p\leqslant q\leqslant\frac{(\nu+n)p}{\nu+n-mp}. \tag{50}$$

[如果 $\nu=mp-n$，则对于 $p\leqslant q<\infty$，(50) 成立(如果 $p=1$ 则 $q=$

∞). 如果 $\nu < mp-n$, 则对于 $p \leqslant q \leqslant \infty$, (50) 成立.]

5.36 定理 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有下列性质的区域：存在正常数 $\nu < mp-n$ 和 A 使得对于每个 $x \in \Omega$ 存在一个开集 G, $x \in G \subset \Omega$ 和一个一对一的映射 ψ, 把 G 映到一个标准尖点区域 $Q_{k,\lambda}$ 上，其中 $(\lambda-1)k \leqslant \nu$, 而且使得对所有的 $i, j (1 \leqslant i, j \leqslant n)$, 所有的 $x \in G$, 和所有的 $y \in Q_{k,\lambda}$, 有

$$\left|\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\right| \leqslant A \qquad \text{和} \qquad \left|\frac{\partial (\psi^{-1})_j}{\partial y_i}\right| \leqslant A.$$

则

$$W^{m,p}(\Omega) \to C_B^0(\Omega). \tag{51}$$

更一般地，如果 $\nu < (m-j)p-n$, 其中 $0 \leqslant j \leqslant m-1$, 则

$$W^{m,p}(\Omega) \to C_B^j(\Omega).$$

5.37 定理 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有下列性质的区域：存在正常数 ν, δ 和 A 使得对每一对满足 $|x-y| \leqslant \delta$ 的点 x, $y \in \Omega$, 存在一个开集 G, 使 $x, y \in G \subset \Omega$, 还存在一个一对一的映射 ψ, 把 G 映到某个标准尖点区域 $Q_{k,\lambda}$ 上去，其中 $(\lambda-1)k \leqslant \nu$, 还使得对所有的 i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, 所有的 $x \in G$, 和所有的 $y \in Q_{k,\lambda}$, 有

$$\left|\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\right| \leqslant A \qquad \text{和} \qquad \left|\frac{\partial (\psi^{-1})_j}{\partial y_i}\right| \leqslant A.$$

假定对某个使得 $0 \leqslant j \leqslant m-1$ 的 j, 我们有 $(m-j-1)p < \nu+n < (m-j)p$. 则

$$W^{m,p}(\Omega) \to C^{j,\mu}(\overline{\Omega}),$$

$$0 < \mu \leqslant m-j-[(n+\nu)/p]. \tag{52}$$

如果 $(m-j-1)p = \nu+n$, 则对 $0 < \mu < 1$, (52) 成立. 两种情形都有 $W^{m,p}(\Omega) \to C^j(\overline{\Omega})$.

5.38 附注 (1) 读者可以构造与 5.25——5.28 节中类似的例子来说明上述三个定理对于所考虑的区域说来给出了最好可能的

嵌入.

(2) 下面的例子有助于说明定理 5.35: 设 $\Omega=\{(x_1, x_2, x_3)\in\mathbf{R}^3: x_2>0, x_2^2<x_1<3x_2^2\}$. 令 $a=(3/4\pi)^{1/3}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中具有单位体积的球的半径,容易验证变换

$$y_1=x_1-2x_2^2, \quad y_2=x_2, \quad y_3=x_3-(k/a),$$
$$k=0, \pm1, \pm2, \cdots,$$

像定理 5.35 的叙述中所要求的函数 ψ 那样地把 Ω 的子区域 G_k 变换到标准尖点区域 $Q_{1,2}$ 上去. 而且 $\{G_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 具有有限交性质,除 Ω 上的一个具有锥性质的集合外盖住 Ω. 因此如果 $mp<4$ 则对于 $p\leqslant q\leqslant 4p(4-mp)$,如果 $mp=4$ 则对于 $p\leqslant q<\infty$, 如果 $mp>4$,则对于 $p\leqslant q\leqslant\infty$,有 $W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$.

包含带权范数的嵌入不等式

5.39 经过 (47) 和 (48) 把一个标准尖点区域映到与它相应的标准锥上去的技巧是证明定理 5.35 的主要技巧. 这种变换把形如 Jacobi 行列式 (49) 的权因子引入到那些有关的积分中去. 因此对于这种标准锥形区域我们一定会得到相应于由到锥的轴向平面的距离之幂给出的带权 L^p-范数的嵌入不等式. 在把嵌入定理 5.4 推广到更一般的包含带权范数的 Sobolev 空间去的时候, 这种不等式也是有用的.

我们从 $\mathbf{R}$ 中的固定开区间 $(0,T)$ 上的连续可微函数的某些一维不等式开始.

5.40 引理 如果 $\nu>0$ 而 $u\in C^1(0,T)$, 又如果 $\int_0^T|u'(t)|\,t^\nu dt<\infty$, 则 $\lim\limits_{t\to0+}|u(t)|\,t^\nu=0$.

证明 设给定 $\varepsilon>0$ 而且固定 s, $0<s<T/2$, 使它小到足以使任何满足 $0<t<s$ 的 t 有

$$\int_t^s |u'(\tau)|\tau^\nu d\tau<\varepsilon/3.$$

存在 $\delta, 0<\delta<s$，使得

$$\delta^\nu |u'(T/2)|<\varepsilon/3$$

且

$$(\delta/s)^\nu\int_s^{T/2} |u'(\tau)|\tau^\nu d\tau<\varepsilon/3.$$

如果 $0<t\leqslant\delta$，我们有

$$|u(t)|\leqslant|u(T/2)|+\int_t^{T/2} |u'(\tau)|d\tau$$

所以

$$t^\nu|u(t)|\leqslant\delta^\nu|u(T/2)|+\int_t^s |u'(\tau)|\tau^\nu d\tau$$

$$+(\delta/s)^\nu\int_s^{T/2} |u'(\tau)|\tau^\nu d\tau<\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{t\to0+} t^\nu|u(t)|=0. \quad \blacksquare$$

5.41 引理 如果 $\nu>0, p\geqslant1$，而且 $u\in C^1(0,T)$，则

$$\int_0^T |u(t)|^p t^{\nu-1}dt\leqslant\frac{\nu+1}{\nu T}\int_0^T |u(t)|^p t^\nu dt$$

$$+\frac{p}{\nu}\int_0^T|u(t)|^{p-1}|u'(t)|\ t^\nu dt. \tag{53}$$

证明 不失一般性可以假定(53)的右端是有限的，而且假定$p=1$. 分部积分给出

$$\int_0^T|u(t)|\left[\nu t^{\nu-1}-\frac{\nu+1}{T}t^\nu\right]dt$$

$$=-\int_0^T\left[t^\nu-\frac{1}{T}t^{\nu+1}\right]\frac{d}{dt}|u(t)|dt;$$

引理 5.40 保证要积分的项在 $t=0$ 处等于零. 移项并估计一下右端的项就给出

$$\nu\int_0^T |u(t)|\, t^{\nu-1}dt$$

$$\leqslant\frac{\nu+1}{T}\int_0^T |u(t)|\, t^\nu dt+\int_0^T |u'(t)|\, t^\nu dt,$$

这就是 $p=1$ 时的(53)式. ∎

5.42 引理 如果 $\nu>0, p\geqslant1$, 而 $u\in C^1(0,T)$, 我们有下面一对不等式

$$\sup_{0<t<T}|u(t)|^p\leqslant\frac{2}{T}\int_0^T|u(t)|^p dt$$

$$+p\int_0^T|u(t)|^{p-1}|u'(t)|dt, \tag{54}$$

$$\sup_{0<t<T}|u(t)|^p t^\nu\leqslant\frac{\nu+3}{T}\int_0^T|u(t)|^p t^\nu dt$$

$$+2p\int_0^T|u(t)|^{p-1}|u'(t)|\, t^\nu dt. \tag{55}$$

证明 只要证 $p=1$ 的情形就可以了. 如果 $0<t\leqslant T/2$, 分部积分得到

$$\int_0^{T/2}\left|u\left(t+\frac{T}{2}-\tau\right)\right|d\tau=\frac{T}{2}|u(t)|$$

$$-\int_0^{T/2}\tau\frac{d}{d\tau}\left|u\left(t+\frac{T}{2}-\tau\right)\right|d\tau,$$

由此得到

$$|u(t)|\leqslant\frac{2}{T}\int_0^T|u(\sigma)|d\sigma$$

$$+\int_0^T|u'(\sigma)|d\sigma.$$

对于 $T/2\leqslant t<T$, 从对 $\int_0^{T/2}|u(t+\tau-T/2)|d\tau$ 的分部积分得到同样的不等式. 这就证明了 $p=1$ 时的 (54) 式. 在这个不等式中用 $u(t)t^\nu$ 代替 $u(t)$, 得到

$$
\begin{aligned}
\sup_{0<t<T}|u(t)|t^\nu \leqslant & \frac{2}{T}\int_0^T |u(t)|t^\nu dt \\
& +\int_0^T [|u'(t)|t^\nu+\nu|u(t)|t^{\nu-1}]dt \\
\leqslant & \frac{2}{T}\int_0^T |u(t)|t^\nu dt \\
& +\int_0^T |u'(t)|t^\nu dt \\
& +\nu\left\{\frac{\nu+1}{\nu T}\int_0^T |u(t)|t^\nu dt\right. \\
& \left.+\frac{1}{\nu}\int_0^T |u'(t)|t^\nu dt\right\}.
\end{aligned}
$$

这里为了得到最后的那个不等式已经用到了(53)式. 这就是 $p=1$ 时的(55)式. ▮

5.43 现在我们转向 $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 2$. 如果 $x\in\mathbf{R}^n$, 我们将利用球极坐标表示

$$x=(\rho,\phi)=(\rho,\phi_1,\cdots,\phi_{n-1}),$$

其中 $\rho\geqslant 0$, $-\pi\leqslant\phi_1\leqslant\pi$, $0\leqslant\phi_2,\cdots,\phi_{n-1}\leqslant\pi$, 而且

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \rho\sin\phi_1\sin\phi_2\cdots\sin\phi_{n-1}, \\
x_2 &= \rho\cos\phi_1\sin\phi_2\cdots\sin\phi_{n-1}, \\
x_3 &= \rho\cos\phi_2\cdots\sin\phi_{n-1}, \\
&\vdots \\
x_n &= \rho\cos\phi_{n-1}.
\end{aligned}
$$

体积元素是

$$dx=dx_1dx_2\cdots dx_n=\rho^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\sin^{j-1}\phi_j d\rho d\phi,$$

其中 $d\phi=d\phi_1\cdots d\phi_{n-1}$.

对于 $1\leqslant k\leqslant n$ 定义函数 $r_k=r_k(x)$如下:

$$r_1(x)=\rho|\sin\phi_1|\prod_{j=2}^{n-1}\sin\phi_j,$$

$$r_k(x)=\rho\prod_{j=k}^{n-1}\sin\phi_j,\quad k=2,3,\cdots,n-1,$$

$$r_n(x)=\rho.$$

对于 $1\leqslant k\leqslant n-1$，$r_k(x)$是由 $x_{k+1},\cdots,x_n$ 轴张成的坐标平面到 x 的距离；$r_n(x)$正好是原点到 x 点的距离．关于使用形如

$$P=\prod_{j=k}^{m}P_j$$

的连乘积符号，今后约定，如果 $m<k$，则 $P=1$．

设 Q 是 $\mathbf{R}^n$ 中由不等式

$$0<\rho<a,\quad -\beta_1<\phi_1<\beta_1,\quad 0\leqslant\phi_j<\beta_j,$$
$$j=2,3,\cdots,n-1 \tag{56}$$

规定的锥形开区域，其中 $0<\beta_i\leqslant\pi$．［与任何 $\beta_i=\pi$ 相对应，(56)中的不等号“$<$”应代之以“$\leqslant$”．如果所有的 $\beta_i=\pi$，则第一个不等式应该用 $0\leqslant\rho<a$ 来代替．］应该注意，任何(5.34 节引入的)标准锥 Q_k 都有(56)式的形式，其中参数 β_i，$1\leqslant i\leqslant n-1$，应作某种选择．

下面的引理用一种对我们说来是合适的方式推广了引理 5.41．

5.44 引理 设 Q 由(56)式规定，又设 $p\geqslant1$，假定或者 $m=k=1$，或者 $2\leqslant m\leqslant n$ 且 $1\leqslant k\leqslant n$．还假定 $1-k<\nu_1\leqslant\nu\leqslant\nu_2<\infty$．那么存在一个和 ν,a 无关的常数 $K=K(m,k,n,p,\nu_1,\nu_2,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1})$ 使得对于一切函数 $u\in C^1(Q)$ 有

$$\int_Q|u(x)|^p[r_k(x)]^\nu[r_m(x)]^{-1}dx$$
$$\leqslant K\int_Q|u(x)|^{p-1}[(1/a)|u(x)|$$
$$+|\mathrm{grad}u(x)|][r_k(x)]^\nu dx. \tag{57}$$

证明 仍然只对 $p=1$ 证明 (57) 就够了．设 $Q_+=\{x=(\rho,\phi)\in$

$Q:\phi_1\geqslant 0\}$, $Q_-=\{x\in Q:\phi_1\leqslant 0\}$. 则 $Q=Q_+\cup Q_-$. 我们只对Q_+(不过我们把 Q_+ 仍叫做 Q)证明(57); 类似地可以证明对 Q_- 的(57)式,所以对给定的 Q (57)式成立,因此,假定 $Q=Q_+$.

对于 $k\leqslant m$,我们可以把(57)写成形式(取 $p=1$)

$$\int_Q |u| \prod_{j=2}^{k-1} \sin^{j-1}\phi_j \prod_{j=k}^{m-1} \sin^{\nu+j-1}\phi_j \times \prod_{j=m}^{n-1} \sin^{\nu+j-2}\phi_j \rho^{\nu+n-2} d\rho d\phi$$
$$\leqslant K\int_Q\left[\frac{1}{a}|u|+|\operatorname{grad}u|\right]\prod_{j=2}^{k-1}\sin^{j-1}\phi_j \times \prod_{j=k}^{n-1} \sin^{\nu+j-1}\phi_j \rho^{\nu+n-1} d\rho d\phi. \tag{58}$$

对于 $k>m\geqslant 2$ 我们可以把(57)写成形式

$$\int_Q |u| \prod_{j=2}^{m-1} \sin^{j-1}\phi_j \prod_{j=m}^{k-1} \sin^{j-2}\phi_j \times \prod_{j=k}^{n-1} \sin^{\nu+j-2}\phi_j \rho^{\nu+n-2} d\rho d\phi$$
$$\leqslant K\int_Q\left[\frac{1}{a}|u|+|\operatorname{grad}u|\right]\prod_{j=2}^{k-1}\sin^{j-1}\phi_j \times \prod_{j=k}^{n-1} \sin^{\nu+j-1}\phi_j \rho^{\nu+n-1} d\rho d\phi. \tag{59}$$

由于在引理的陈述中对 ν, m 和 k 的限制, (58)和(59)都是

$$\int_Q |u| \prod_{j=1}^{i-1} \sin^{\mu_j}\phi_j \prod_{j=i}^{n-1} \sin^{\mu_j-1}\phi_j \rho^{\nu+n-2} d\rho d\phi$$
$$\leqslant K\int_Q\left[\frac{1}{a}|u|+|\operatorname{grad}u|\right] \times \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{\mu_j}\phi_j \rho^{\nu+n-1} d\rho d\phi \tag{60}$$

的特殊情形，其中 $1 \leqslant i \leqslant n$，$\mu_j \geqslant 0$，而当 $j \geqslant i$ 时 $0 < \mu_j^* \leqslant \mu_j$．我们对 i 用向后归纳法来证明(60)．把 u 看作是定义在 $(0, a)$ 上 ρ 的函数，把引理 5.41 用上去，再对带有适当权的其余变量积分，就得到 $i=n$ 时的(60)．所以假定对 $i=k+1$ 已经证明，其中 $1 \leqslant k \leqslant n-1$．我们现在证明对 $i=k$ 时(60)也成立．

如果 $\beta_k < \pi$，我们有

$$\sin\phi_k \leqslant \phi_k \leqslant K_1 \sin\phi_k,\ 0 \leqslant \phi_k \leqslant \beta_k, \tag{61}$$

其中 $K_1 = K_1(\beta_k)$．由引理 5.41，又由于

$$|\partial u / \partial \phi_k| \leqslant \rho |\mathrm{grad}\, u| \prod_{j=k+1}^{n-1} \sin\phi_j,$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\beta_k} |u(\rho, \phi)| \sin^{\mu_k - 1}\phi_k d\phi_k \\
&\leqslant \int_0^{\beta_k} |u| \phi_k^{\mu_k - 1} d\phi_k \\
&\leqslant K_2 \int_0^{\beta_k} \left[|u| + |\mathrm{grad}\, u| \rho \prod_{j=k+1}^{n-1} \sin\phi_j \right] \phi_k^{\mu_k} d\phi_k \\
&\leqslant K_3 \int_0^{\beta_k} \Bigg[|u| + |\mathrm{grad}\, u| \rho \\
&\qquad \times \prod_{j=k+1}^{n-1} \sin\phi_j \Bigg] \sin^{\mu_k}\phi_k d\phi_k.
\end{aligned} \tag{62}$$

注意到 K_2 从而 K_3 依赖于 β_k，但是在引理的条件下可以选得与 μ_k 无关，从而与 ν 无关．如果 $\beta_k = \pi$，利用 $\int_0^\pi = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^\pi$， 以及代替(61)利用不等式

$$\begin{aligned}
&\sin\phi_k \leqslant \phi_k \leqslant (\pi/2)\sin\phi_k \quad 当\ 0 \leqslant \phi_k \leqslant \pi/2\ 时, \\
&\sin\phi_k \leqslant \pi - \phi_k \leqslant (\pi/2)\sin\phi_k \quad 当\ \pi/2 \leqslant \phi_k \leqslant \pi\ 时
\end{aligned} \tag{63}$$

就得到(62)．利用(62)和归纳法假设，现在有

$$\int_Q |u| \prod_{j=1}^{k-1} \sin^{\mu_j}\phi_j \prod_{j=k}^{n-1} \sin^{\mu_j-1}\phi_j \rho^{\nu+n-2} d\rho d\phi$$

$$\leqslant \int_0^a \rho^{\nu+n-2} d\rho \prod_{j=1}^{k-1} \int_0^{\beta_j} \sin^{\mu_j}\phi_j d\phi_j$$

$$\times \prod_{j=k+1}^{n-1} \int_0^{\beta_j} \sin^{\mu_j-1}\phi_j d\phi_j \int_0^{\beta_k} |u| \sin^{\mu_k-1}\phi_k d\phi_k$$

$$\leqslant K_3 \int_Q |\text{grad} u| \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{\mu_j}\phi_j \rho^{\nu+n-1} d\rho d\phi$$

$$+ K_3 \int_Q |u| \prod_{j=1}^{k} \sin^{\mu_j}\phi_j$$

$$\times \prod_{j=k+1}^{n-1} \sin^{\mu_j-1}\phi_j \rho^{\nu+n-2} d\rho d\phi$$

$$\leqslant K \int_Q \left[\frac{1}{a}|u| + |\text{grad}\, u|\right] \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{\mu_j}\phi_j \rho^{\nu+n-1} d\rho d\phi.$$

这就用归纳法证明了(60)，因而证明了引理. ▌

在下面的引理中，对于区域Q和适当的带权L^p-范数我们得到一个类似于引理 5.10 的嵌入不等式.

5.45 引理 设Q由 (56) 规定，又设$p \geqslant 1$和$1 \leqslant k \leqslant n$. 假定$\max(1-k, p-n) < \nu_1 < \nu_2 < \infty$. 则存在一个与$a$无关的常数$K = K(k, n, p, \nu_1, \nu_2, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1})$使得对于一切满足$\nu_1 \leqslant \nu \leqslant \nu_2$的$\nu$，和一切函数$u \in C^1(Q) \cap C(\bar{Q})$我们有

$$\left\{\int_Q |u(x)|^q [r_k(x)]^\nu dx\right\}^{1/q}$$

$$\leqslant K\left\{\int_Q [(1/a^p)|u(x)|^p + |\text{grad}\, u(x)|^p] \times [r_k(x)]^\nu dx\right\}^{1/p}, \tag{64}$$

其中$q = (\nu+n)p/(\nu+n-p)$.

证明 设 $\delta = (\nu+n-1)p/(\nu+n-p)$，$s = (\nu+n-1)/\nu$，$s' =$

$(\nu+n-1)/(n-1)$. 由 Hölder 不等式和引理 5.44($m=k$ 的情形)我们有

$$\int_Q |u(x)|^q [r_k(x)]^\nu dx$$

$$\leqslant \left\{\int_Q |u|^\delta r_k{}^{\nu-1} dx\right\}^{1/s}$$

$$\times \left\{\int_Q |u|^{n\delta/(n-1)} r_k{}^{n\nu/(n-1)} dx\right\}^{1/s'}$$

$$\leqslant K_1 \left\{\int_Q |u|^{\delta-1}[(1/a)|u|+|\operatorname{grad} u|] r_k^\nu dx\right\}^{1/s}$$

$$\times \left\{\int_Q |u|^{n\delta/(n-1)} r_k{}^{n\nu/(n-1)} dx\right\}^{1/s'}. \qquad (65)$$

为了估计上式中最后一个积分,我们采用记号

$$\rho^* = (\phi_1, \cdots, \phi_{n-1}),$$

$$\phi_j^* = (\rho, \phi_1, \cdots, \hat{\phi}_j, \cdots, \phi_{n-1}),$$

$$j=1, 2, \cdots, n-1.$$

其中"$\wedge$"表示省略该分量①, 设

$$Q_0^* = \{\rho^*: (\rho, \rho^*) \in Q, \text{ 对于 } 0<\rho<a\},$$

$$Q_j^* = \{\phi_j^*: (\rho, \phi) \in Q, \text{ 对于 } 0<\phi_j<\beta_j\}.$$

Q_0^* 和 $Q_j^*(1\leqslant j\leqslant n-1)$ 都是 R^{n-1} 中的区域. 我们在 Q_0^* 和 Q_j^* 上分别定义函数如下:

$$[F_0(\rho^*)]^{n-1} = [F_0(\phi_1, \cdots, \phi_{n-1})]^{n-1}$$

$$= \sup_{0<\rho<a} [|u|^\delta \rho^{\nu+n-1}] \prod_{i=k}^{n-1} \sin^\nu \phi_i$$

$$\times \prod_{i=2}^{n-1} \sin^{i-1} \phi_i,$$

$$[F_j(\phi_j^*)]^{n-1} = [F_j(\rho, \phi_1, \cdots, \hat{\phi}_j, \cdots, \phi_{n-1})]^{n-1}$$

① 本书后面单独使用符号 $\hat{\phi}_j$ 时,表示 $(\phi_1, \cdots, \phi_{j-1}, \phi_{j+1}, \cdots, \phi_{n-1})$——译者注.

$$= \sup_{0<\phi_j<\beta_j} [|u|^\delta \sin^{\nu+j-1}\phi_j]\rho^{\nu+n-2}$$

$$\times \prod_{i=k}^{n-1} \sin^\nu \phi_i \prod_{i=2}^{j-1} \sin^{i-1}\phi_i$$

$$\times \prod_{i=j+1}^{n-1} \sin^{i-2}\phi_i.$$

那么有

$$|u|^{n\delta/(n-1)} r_k^{n\nu/(n-1)} \rho^{n-1} \prod_{i=2}^{n-1} \sin^{i-1}\phi_i$$

$$\leqslant F_0(\rho^*) \prod_{j=1}^{n-1} F_j(\phi_j^*).$$

应用组合引理 5.9, 得到

$$\int_Q |u|^{n\delta/(n-1)} r_k^{n\nu/(n-1)} dx$$

$$\leqslant \int_Q F_0(\rho^*) \prod_{j=1}^{n-1} F_j(\phi_j^*) d\rho d\phi$$

$$\leqslant \left\{ \int_{Q_0^*} [F_0(\rho^*)]^{n-1} d\phi \right.$$

$$\left. \times \prod_{j=1}^{n-1} \int_{Q_j^*} [F_j(\phi_j^*)]^{n-1} d\rho d\hat{\phi}_j \right\}^{1/(n-1)}. \tag{66}$$

根据引理 5.42, 又由于 $|\partial u/\partial\rho| \leqslant |\text{grad}\, u|$,

$$\sup_{0<\rho<a} |u|^\delta \rho^{\nu+n-1}$$

$$\leqslant K_2 \int_0^a |u|^{\delta-1} [(1/a)|u|$$

$$+ |\text{grad}\, u|] \rho^{\nu+n-1} d\rho,$$

其中对于 $1-n<\nu_1 \leqslant \nu \leqslant \nu_2 < \infty$ 的 ν 来说 K 与 ν 无关. 由此得到

$$\int_{Q_0^*} [F_0(\rho^*)]^{n-1} d\phi$$

$$\leqslant K_2\int_Q |u|^{\delta-1}[(1/a)|u|+|\text{grad }u|]r_k^\nu dx. \tag{67}$$

类似地，利用引理 5.44 中的不等式(61)或(63)，从引理 5.42 得到

$$\sup_{0<\phi_j<\beta_j}|u|^\delta \sin^{\nu+j-1}\phi_j$$

$$\leqslant K_{2,j}\int_0^{\beta_j}|u|^{\delta-1}\left[|u|+\left|\frac{\partial u}{\partial\phi_j}\right|\right]\sin^{\nu+j-1}\phi_j d\phi_j$$

$$\leqslant K_{2,j}\int_0^{\beta_j}|u|^{\delta-1}[|u|+|\text{grad }u|$$

$$\times\rho\prod_{i=j+1}^{n-1}\sin\phi_i]\sin^{\nu+j-1}\phi_j d\phi_j,$$

由于

$$|\partial u/\partial\phi_j|\leqslant\rho\prod_{i=j+1}^{n-1}\sin\phi_i.$$

因此

$$\int_{Q_j^*}[F_j(\phi_j^*)]^{n-1}d\rho d\hat{\phi}_j$$

$$\leqslant K_{2,j}\int_Q|\text{grad }u||u|^{\delta-1}r_k^\nu dx$$

$$+K_{2,j}\int_Q|u|^\delta r_k^\nu r_{j+1}^{-1}dx$$

$$\leqslant K_{3,j}\int_Q|u|^{\delta-1}[(1/a)|u|+|\text{grad }u|]r_k^\nu dx \tag{68}$$

这里，为了得到最后一个不等式，我们已经再次用了引理 5.44. 注意到对于允许的 ν 值可以选常数 $K_{2,j}$ 和 $K_{3,j}$ 和 ν 无关. 把(67)和(68)代入(66)然后又代入(65)就导至

$$\int_Q|u|^q r_k^\nu dx$$

$$\leqslant K_4\left\{\int_Q|u|^{\delta-1}[(1/a)|u|\right.$$

$$+\left.|\operatorname{grad} u| r_k^\nu dx\right\}^{1/s+n/(n-1)s'}$$

$$\leqslant K_4\left\{\left\{\int_Q |u|^q r_k^\nu dx\right\}^{(p-1)/p}\right.$$

$$\times\left\{2^{p-1}\int_Q\left[(1/a^p)\,|u|^p+|\operatorname{grad} u|^p\right]\right.$$

$$\left.\left.\times r_k^\nu dx\right\}^{1/p}\right\}^{(\nu+n)/(\nu+n-1)}.$$

因为$(\nu+n-1)/(\nu+n)-(p-1)/p=1/q$，又由于$u$在$Q$上有界，而且$\nu>1-n$，$\int_Q |u|^q r_k^\nu dx$是有限的，消去后就得到(64)．∎

5.46 附注 (1) $u\in C(\bar{Q})$这一假定只是用来保证上面所说的消去的合法性．事实上对于任何$u\in C^1(Q)$引理都成立．

(2) 如果$1-k<\nu_1<\nu_2<\infty$而且$\nu_1\leqslant\nu\leqslant\nu_2$，其中$\nu\leqslant p-n$，则对于任何满足$1\leqslant q<\infty$的$q$，(64)都成立．只要对大的$q$证明这点就行了．如果$q\geqslant(\nu+n)/(\nu+n-1)$，则对于满足$1\leqslant s<p$的某个$s$，$q=(\nu+n)s/(\nu+n-s)$．因此

$$\left\{\int_Q |u|^q r_k^\nu dx\right\}^{s/q}$$

$$\leqslant K\int_Q\left[(1/a^s)\,|u|^s+|\operatorname{grad} u|^s\right] r_k^\nu dx$$

$$\leqslant K\left\{2^{(p-s)/s}\int_Q\left[(1/a^p)|u|^p+|\operatorname{grad} u|^p\right] r_k^\nu dx\right\}^{s/p}$$

$$\times\left\{\int_Q r_k^\nu dx\right\}^{(p-s)/p},$$

由于右端的最后一个因子是有限的，故得(64)．

(3) 如果$\nu=m$是一正整数，那么能用如下方法非常简单地得到(64)．设$y=(x,z)=(x_1,\cdots,x_n,z_1,\cdots,z_m)$表示$\mathbf{R}^{n+m}$中的一个点，而且对于$x\in Q$定义$u^*(y)=u(x)$．如果

$$Q^*=\{y\in\mathbf{R}^{n+m}: y=(x,z), x\in Q, 0<z_j<r_k(x), 1\leqslant j\leqslant m\},$$

那么 Q^* 在 $\mathbf{R}^{n+m}$ 中具有锥性质，由此根据定理5.4，令 $q=(n+m)p/(n+m-p)$，我们有

$$\left\{\int_Q |u|^q r_k^m dx\right\}^{1/q}$$

$$=\left\{\int_{Q^*} |u^*(y)|^q dy\right\}^{1/q}$$

$$\leqslant K\left\{\int_{Q^*}[(1/a^p)|u^*(y)|^p+|\operatorname{grad} u^*(y)|^p]dy\right\}^{1/p}$$

$$=K\left\{\int_Q[(1/a^p)|u|^p+|\operatorname{grad} u|^p]r_k^m dx\right\}^{1/p},$$

这里用了 $|\operatorname{grad} u^*(y)|=|\operatorname{grad} u(x)|$，$u^*$ 与 z 无关.

（4）假定 $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，或更一般地，对于上述引理中的 ν，

$$\int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|^p[r_k(x)]^\nu dx<\infty.$$

如果取 $\beta_i=\pi$，$1\leqslant i\leqslant n-1$，在(64)中令 $a\to\infty$，我们得到

$$\left\{\int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|^q[r_k(x)]^\nu dx\right\}^{1/q}$$

$$\leqslant K\left\{\int_{\mathbf{R}^n} |\operatorname{grad} u(x)|^p[r_k(x)]^\nu dx\right\}^{1/p},$$

这个不等式推广了5.11节中给出的Sobolev不等式.

现在我们把引理5.15推广到允许带权范数的情形. 这里与其处理上述引理中考虑过的特殊情形 Q 还不如处理具有锥性质的任何区域来得方便. 下面的初等结果是需要的.

5.47 引理 设 $z\in\mathbf{R}^k$，又设 Ω 是 $\mathbf{R}^k$ 中体积有限的区域. 如果 $0\leqslant\nu<k$，则

$$\int_\Omega |x-z|^{-\nu}dx\leqslant K(\operatorname{vol}\Omega)^{1-\nu/k}, \tag{69}$$

其中常数 K 依赖于 ν 和 k 但不依赖于 z 或 Ω.

证明 设 B 是 $\mathbf{R}^k$ 中中心在 z 而体积等于 $\operatorname{vol}\Omega$ 的球. 容易验证

(69)的左边不超过$\int_B |x-z|^{-\nu}dx$,但是对于$\Omega=B$,(69)显然成立. ∎

5.48 引理 设Ω是$\mathbf{R}^n$中具有锥性质的区域. 设$1\leqslant k\leqslant n$,又设P是$\mathbf{R}^n$中一个$(n-k)$维平面. 用$r(x)$表示x到P的距离,如果$0\leqslant\nu<p-n$,则对于所有的$u\in C^1(\Omega)$有

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)|\leqslant K\left\{\int_\Omega[|u(x)|^p+|\operatorname{grad}u(x)|^p][r(x)]^\nu dx\right\}^{1/p}, \tag{70}$$

其中常数K可以依赖于ν,n,p,k和决定Ω的锥性质的锥C但是不依赖于u.

证明 贯穿证明的始终A_i和K_i表示依赖于(70)中的K所允许依赖的参数ν,n,p,k和C中某几个的常数. 只要证明如果C是顶点在原点又包含在Ω中的有限锥,则

$$|u(0)|\leqslant K\left\{\int_C[|u(x)|^p+|\operatorname{grad}u(x)|^p]\times[r(x)]^\nu dx\right\}^{1/p}. \tag{71}$$

对于$0\leqslant j\leqslant n$,设A_j表示C在$\mathbf{R}^j$上投影的j维Lebesgue测度当取遍$\mathbf{R}^n$的所有j维子空间$\mathbf{R}^j$时的上确界. 记$x=(x',x'')$,其中$x'=(x_1,\cdots,x_{n-k})$而$x''=(x_{n-k+1},\cdots,x_n)$,不失一般性我们可以假定$P$与相应于$x''$的分量的坐标轴正交. 定义

$$S=\{x'\in R^{n-k}:(x',x'')\in C\quad 对于某些\ x''\in\mathbf{R}^k\}$$

$$R(x')=\{x''\in\mathbf{R}^k:(x',x'')\in C\}\quad 对于每个\ x'\in S.$$

对于$0\leqslant t\leqslant 1$我们用C_t来表示锥$\{tx:x\in C\}$,所以$C_t\subset C$而且当$t=1$时$C_t=C$. 对于C_t我们定义一些和前面对C所定义的量相似的量$A_{t,j},S_t$和$R_t(x')$. 显然$A_{t,j}=t^jA_j$. 如果$x\in C$,我们有

$$u(x)=u(0)+\int_0^1\frac{d}{dt}u(tx)dt,$$

所以

$$|u(0)|\leqslant|u(x)|+|x|\int_0^1|\operatorname{grad}u(tx)|\,dt.$$

令 $V=\operatorname{vol}C$ 而 $a=\sup\limits_{x\in C}|x|$，把上述不等式在 C 上积分，得到

$$\begin{aligned}V|u(0)|&\leqslant\int_C|u(x)|dx+a\int_C\int_0^1|\operatorname{grad}u(tx)|\,dt\,dx\\&=\int_C|u(x)|dx+a\int_0^1 t^{-n}dt\\&\qquad\times\int_{C_t}|\operatorname{grad}u(x)|dx.\end{aligned}\tag{72}$$

设 z 表示 x 在 P 上的正交投影，则 $r(x)=|x''-z''|$. 由于 $0\leqslant\nu<p-n$ 故有 $p>1$，所以根据引理 5.47

$$\begin{aligned}&\int_{C_t}[r(x)]^{-\nu/(p-1)}dx\\&=\int_{S_t}dx'\int_{R_t(x')}|x''-z''|^{-\nu/(p-1)}dx''\\&\leqslant K_1\int_{S_t}[A_{t,k}]^{1-\nu/k(p-1)}dx'\\&\leqslant K_1[A_{t,k}]^{1-\nu/k(p-1)}A_{t,n-k}\\&=K_2t^{n-\nu/(p-1)}.\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}&\int_{C_t}|\operatorname{grad}u(x)|dx\\&\leqslant\left\{\int_{C_t}|\operatorname{grad}u(x)|^p[r(x)]^\nu dx\right\}^{1/p}\\&\qquad\times\left\{\int_{C_t}[r(x)]^{-\nu/(p-1)}dx\right\}^{1/p'}\\&\leqslant K_3t^{n-(\nu+n)/p}\left\{\int_C|\operatorname{grad}u(x)|^p[r(x)]^\nu dx\right\}^{1/p}.\end{aligned}\tag{73}$$

因此，由于 $\nu<p-n$

$$\int_0^1 t^{-n}dt\int_{C_t}|\text{grad}\,u(x)|dx$$

$$\leqslant K_4\left\{\int_C|\text{grad}\,u(x)|^p[r(x)]^\nu dx\right\}^{1/p}. \tag{74}$$

类似地，

$$\int_C|u(x)|dx\leqslant\left\{\int_C|u(x)|^p[r(x)]^\nu dx\right\}^{1/p}$$

$$\times\left\{\int_C[r(x)]^{-\nu/(p-1)}dx\right\}^{1/p'}$$

$$\leqslant K_5\left\{\int_C|u(x)|^p[r(x)]^\nu dx\right\}^{1/p}. \tag{75}$$

从(72)，(74)和(75)就得到(71).▌

5.49 引理 假定引理 5.48 的一切条件都满足，此外还假定 Ω 有强局部 Lipschitz 性质．则对于一切 $u\in C^1(\Omega)$，有

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\mu}$$

$$\leqslant K\left\{\int_\Omega[|u(x)|^p+|\text{grad}\,u(x)|^p][r(x)]^\nu dx\right\}^{1/p}, \tag{76}$$

其中 $\mu=1-(\nu+n)/p$ 满足 $0<\mu<1$ 而 K 与 u 无关.

证明 证明和引理 5.17 中证明(28)式一样，只是在(29)式中用到的是不等式

$$\int_{\Omega_{t\sigma}}|\text{grad}\,u(z)|dz$$

$$\leqslant K_1t^{n-(\nu+n)/p}\left\{\int_\Omega|\text{grad}\,u(z)|^p[r(z)]^\nu dz\right\}^{1/p} \tag{77}$$

当 $\nu=0$ 时的特殊情形．现在的证明中要用(77)式的一般情形，应用和前面得到(73)同样的方法就得到(77).▌

定理 5.35—5.37 的证明

5.50 引理 设$\bar{\nu}\geqslant 0$. 若$\bar{\nu}>p-n$, 设$1\leqslant q\leqslant(\bar{\nu}+n)p/(\bar{\nu}+n-p)$; 否则设 $1\leqslant q<\infty$, 那么存在常数 $K=K(n,p,\bar{\nu})$ 使得对于一切标准尖点区域 $Q_{k,\lambda}$(见 5.34 节)有$(\lambda-1)k\equiv\nu\leqslant\bar{\nu}$, 而且对于一切 $u\in C^1(Q_{k,\lambda})$ 有

$$\|u\|_{0,q,Q_{k,\lambda}}\leqslant K\|u\|_{1,p,Q_{k,\lambda}}. \tag{78}$$

证明 由于每个 $Q_{k,\lambda}$ 具有线段性质, 只要对 $u\in C^1(\bar{Q}_{k,\lambda})$证明(78)就行了. 我们首先对给定的 k 和 λ 证明(78), 然后再证明可以选 K 使之与 k,λ 无关.

先假定 $\bar{\nu}>p-n$. 只要对

$$q=(\bar{\nu}+n)/(\bar{\nu}+n-p)$$

证明(78)就够了. 对于 $u\in C^1(\bar{Q}_{k,\lambda})$定义 $\tilde{u}(y)=u(x)$, 其中 y 和 x 是通过(47) 和 (48)联系起来的. 因此 $\tilde{u}\in C^1(Q_k)\cap C(\bar{Q}_k)$, 其中 Q_k 是与 $Q_{k,\lambda}$ 相应的标准锥. 根据引理 5.45, 又由于 $q\leqslant(\nu+n)p/(\nu+n-p)$, 我们有

$$\|u\|_{0,q,Q_{k,\lambda}}=\left\{\lambda\int_{Q_k}|\tilde{u}(y)|^q[r_k(y)]^\nu dy\right\}^{1/q}$$
$$\leqslant K_1\left\{\int_{Q_k}[|\tilde{u}(y)|^p+|\mathrm{grad}\tilde{u}(y)|^p]\times[r_k(y)]^\nu dy\right\}^{1/q} \tag{79}$$

现在如果 $1\leqslant j\leqslant k$, 则 $x_j=r_k^{\lambda-1}y_j$; 如果 $k+1\leqslant j\leqslant n$, 则 $x_j=y_j$. 因为 $r_k^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_k^2$, 我们有

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_i}=\begin{cases}\delta_{ij}r_k^{\lambda-1}+(\lambda-1)r_k^{\lambda-3}y_iy_j & \text{如果 } 1\leqslant i,j\leqslant k\\ \delta_{ij} & \text{其它情形,}\end{cases}$$

由于在 Q_k 上 $r_k(y)\leqslant 1$, 由此得到

$$|\mathrm{grad}\,\tilde{u}(y)|\leqslant K_2|\mathrm{grad}\,u(x)|.$$

因此这时从(79)就得到(78). 对于 $\bar{\nu}\leqslant p-n$ 及任意 q 的情形，根据附注 5.46(2)，证明是类似的.

为了证明：假如 $\nu=(\lambda-1)k\leqslant\bar{\nu}$，那么(78)中的常数 K 能选得和 k,λ 无关，我们指出只要证明存在一个常数 $\widetilde{K}$ 使得对任何这种 k,λ 和一切 $v\in C^1(Q_k)\cap C(\bar{Q}_k)$ 有

$$\left\{\iint_{Q_k}|v(y)|^q[r_k(y)]^\nu dy\right\}^{1/q}$$

$$\leqslant\widetilde{K}\left\{\iint_{Q_k}[|v(y)|^p+|\operatorname{grad} v(y)|^p]\right.$$

$$\left.\times[r_k(y)]^\nu dy\right\}^{1/p}. \tag{80}$$

事实上，只要证明带有 $\widetilde{K}$ 的(80)，其中 $\widetilde{K}$ 依赖于 k，因为我们可以在 k 的有限多个允许值上取最大值 $\widetilde{K}(k)$. 我们分三种情形来证明.

情形 I　$\bar{\nu}<p-n$, $1\leqslant q<\infty$，根据引理 5.48，对于 $0\leqslant\nu\leqslant\bar{\nu}$ 有

$$\sup_{x\in Q_k}|v(x)|\leqslant K(\nu)\left\{\iint_{Q_k}[|v(y)|^p\right.$$

$$\left.+|\operatorname{grad} v(y)|^p][r_k(y)]^\nu dy\right\}^{1/p}. \tag{81}$$

因为当 ν 增加时右边的积分减少，我们有 $K(\nu)\leqslant K(\bar{\nu})$，由(81)和 Q_k 的有界性就得到(80).

情形 II　$\bar{\nu}>p-n$，只要讨论 $q=(\bar{\nu}+n)p/(\bar{\nu}+n-p)$ 就够了，从引理 5.45 我们得到

$$\left\{\iint_{Q_k}|v|^s r_k^\nu dy\right\}^{1/s}$$

$$\leqslant K_1\left\{\iint_{Q_k}[|v|^p+|\operatorname{grad} v|^p]r_k^\nu dy\right\}^{1/p}, \tag{82}$$

其中 $s=(\nu+n)p/(\nu+n-p)\geqslant q$，对于 $p-n<\nu_0\leqslant\nu\leqslant\bar{\nu}$，$K_1$ 与 ν

无关，根据 Hölder 不等式，又因为在 Q_k 上 $r_k(y)\leqslant 1$，有

$$\left\{\int_{Q_k}|v|^q r_k^\nu dy\right\}^{1/q}$$
$$\leqslant\left\{\int_{Q_k}|v|^s r_k^\nu dy\right\}^{1/s}[\mathrm{vol}\,Q_k]^{(s-q)/sq},$$

所以如果 $\nu_0\leqslant\nu\leqslant\bar{\nu}$，则从(82)得到(80)。

如果 $p-n<0$，我们可以取 $\nu_0=0$，因而证得(80)。否则的话，$p\geqslant n\geqslant 2$。固定 $\nu_0=(\bar{\nu}-n+p)/2$，能找到 ν_1 使得 $0\leqslant\nu_1\leqslant p-n$（或如果 $p=n$ 则 $\nu_1=0$），使得对于 $\nu_1\leqslant\nu\leqslant\nu_0$，有

$$1\leqslant t=\frac{(\nu+n)(\bar{\nu}+n)p}{(\nu+n)(\bar{\nu}+n)+(\bar{\nu}-\nu)p}\leqslant\frac{p}{1+\varepsilon_0},$$

其中 $\varepsilon_0>0$ 只依赖于 $\bar{\nu}$，n 和 p。因为后一不等式我们还可以假定 $t-n<\nu_1$。因为 $(\nu+n)t/(\nu+n-t)=q$，又由于引理 5.45 和 Hölder 不等式，有

$$\left\{\int_{Q_k}|v|^q r_k^\nu dy\right\}^{1/q}$$
$$\leqslant K_2\left\{\int_{Q_k}[|v|^t+|\mathrm{grad}v|^t]r_k^\nu dy\right\}^{1/t}$$
$$\leqslant 2^{(p-1)/pt}K_2\left\{\int_{Q_k}[|v|^p+|\mathrm{grad}v|^p]r_k^\nu dy\right\}^{1/p}[\mathrm{vol}Q_k]^{(p-t)/pt},\tag{83}$$

其中对于 $\nu_1\leqslant\nu\leqslant\nu_0$，$K_2$ 与 ν 无关。

在 $\nu_1>0$ 的情形用情形 I 的方法能对 $0\leqslant\nu\leqslant\nu_1$ 得到一个类似的（一致）估计。把它与(82)，(83)结合起来，就证明了 $\nu_1>0$ 时的(80)。

情形 III　$\bar{\nu}=p-n$，$1\leqslant q<\infty$。固定 $s\geqslant\max(q,n/(n-1))$ 又设 $t=(\nu+n)s/(\nu+n+s)$，所以 $s=(\nu+n)t/(\nu+n-t)$。于是，对于 $0\leqslant\nu\leqslant\bar{\nu}$ 有 $1\leqslant t\leqslant ps/(p+s)<p$。因此我们能选 $\nu_1\geqslant 0$ 使得 $t-n<\nu_1<p-n$，余下的证明与情形 II 类似，这就完成了证

明. ▌

5.51 定理 5.35 的证明 通过和引理 5.12 的证明中使用过的一样的论证，只要考虑特殊情形 $m=1$就行了. 设 q 满足：当 $\nu+n>p$ 时，$p\leqslant q\leqslant(\nu+n)p/(\nu+n-p)$，当 $\nu+n\leqslant p$ 时，$p\leqslant q<\infty$. 显然，如果 $n>p$, 则$q<np/(n-p)$，所以，不论在哪种情形根据定理5.4，对于一切 $u\in C^1(\Omega)$和具有锥性质的Γ的元素G（如果这种G存在的话），都有

$$\|u\|_{0,q,G}\leqslant K_1\|u\|_{1,p,G}.$$

如果 $G\in\Gamma$ 没有锥性质，又如果 ψ: $G\to Q_{k,\lambda}$, 其中$(\lambda-1)k\leqslant\nu$，是定理的陈述中所规定的 1-光滑映射，那么由定理 3.35 和引理 5.50，有

$$\|u\|_{0,q,G}\leqslant K_2\|u\circ\psi^{-1}\|_{0,q,Q_{k,\lambda}}\leqslant K_3\|u\circ\psi^{-1}\|_{1,p,Q_{k,\lambda}}$$
$$\leqslant K_4\|u\|_{1,p,G}$$

其中 K_4 与G 无关. 所以注意到 $q/p\geqslant1$，我们有

$$\|u\|^q_{0,q,\Omega}\leqslant\sum_{G\in\Gamma}\|u\|^q_{0,q,G}\leqslant K_5\sum_{G\in\Gamma}(\|u\|^p_{1,p,G})^{q/p}$$
$$\leqslant K_5\left(\sum_{G\in\Gamma}\|u\|^p_{1,p,G}\right)^{q/p}\leqslant K_5N^{q/p}\|u\|^q_{1,p,\Omega},$$

为了得到最后的不等式，我们已经用了Γ的有限交性质. 通过完备化就得到嵌入(50). [如果 $\nu<mp-n$. 则要求对 $q=\infty$的情形，(50)成立，这是下面要证明的定理 5.36 的一个推论.]▌

5.52 引理 设 $0\leqslant\bar{\nu}<mp-n$. 则存在常数 $K=K(m,p,n,\bar{\nu})$使得如果 $Q_{k,\lambda}$ 是任何满足$(\lambda-1)k=\nu\leqslant\bar{\nu}$ 的标准尖点区域，又如果 $u\in C^m(Q_{k,\lambda})$，则

$$\sup_{x\in Q_{k,\lambda}}|u(x)|\leqslant K\|u\|_{m,p,Q_{k,\lambda}}. \tag{84}$$

证明 只要对 $m=1$ 的情形证明引理就行了；通过和引理 5.15 证明的最后一段中所用的同样的论证就得到对于一般m的证明.

如果$u\in C^1(Q_{k,\lambda})$, $(\lambda-1)k=\nu\leqslant\bar{\nu}$, 根据引理 5.48 和利用引理 5.50 的证明第二段中的方法, 就有

$$\begin{aligned}\sup_{x\in Q_{k,\lambda}}|u(x)|&=\sup_{y\in Q_k}|\tilde{u}(y)|\\&\leqslant K_1\left\{\int_{Q_k}[|\tilde{u}(y)|^p+|\operatorname{grad}\tilde{u}(y)|^p][r_k(y)]^\nu dy\right\}^{1/p}\\&\leqslant K_2\left\{\int_{Q_{k,\lambda}}[|u(x)|^p+|\operatorname{grad}u(x)|^p]dx\right\}^{1/p}.\end{aligned}\tag{85}$$

因为对于 $y\in Q_k$, $r_k(y)\leqslant 1$, 假如 $0\leqslant\nu=(\lambda-1)k\leqslant\bar{\nu}$ 的话, 显然能选到与 k,λ 无关的 K_1, 从而选到与 k, λ 无关的 K_2. ▌

5.53 定理 5.36 的证明 只要证明(51) 就行了. 设 $u\in C^m(\Omega)$. 如果 $x\in\Omega$, 则对于某个区域 G, $x\in G\subset\Omega$, 而对 G, 如定理的陈述中所规定的那样, 存在 1-光滑变换 ψ: $G\to Q_{k,\lambda}$, $(\lambda-1)k\leqslant\nu$. 因此

$$\begin{aligned}|u(x)|\leqslant\sup_{x\in G}|u(x)|&=\sup_{y\in Q_{k,\lambda}}|u\circ\psi^{-1}(y)|\\&\leqslant K_1\|u\circ\psi^{-1}\|_{m,p,Q_{k,\lambda}}\leqslant K_2\|u\|_{m,p,G}\\&\leqslant K_2\|u\|_{m,p,\Omega},\end{aligned}\tag{86}$$

其中 K_1 和 K_2 与 G 无关. 证明的其余部分类似于引理 5.15 证明中的第一段. ▌

5.54 定理 5.37 的证明 和引理 5.17 的证明一样, 只要证明当 $j=0$ 和 $m=1$ 时 (52) 成立就行了, 这就是说证明当 $\nu+n<p$ 和 $0<\mu\leqslant 1-(\nu+n)/p$ 时

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\mu}\leqslant K\|u\|_{1,p,\Omega}\tag{87}$$

成立. 由于(86)对于 $x,y\in\Omega$, $|x-y|>\delta$, (87)成立. 如果$|x-y|<\delta$, 则存在使 $x,y\in G\subset\Omega$ 的 G 以及一个 1-光滑变换 ψ, ψ 把 G 映到标准尖点区域 $Q_{k,\lambda}$ 上, k, λ 满足定理的条件$(\lambda-1)k\leqslant\nu$. 用引理 5.52 的证明中使用过的同样的方法, 从引理 5.49 就能导出不等式(87). 详细证明留给读者. ▌

第六章　$W^{m,p}(\Omega)$的紧嵌入

Rellich-Kondrachov 定理

6.1　设Ω是 $\mathbf{R}^n$ 中一个区域，Ω_0是Ω的一个子区域．又设 $X(\Omega)$为 $W^{m,p}(\Omega)$ 可能嵌入的目标空间，即 $X(\Omega)$ 是空间 $C_B^j(\Omega)$，$C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$，$L^q(\Omega^k)$或者 $W^{j,q}(\Omega^k)$中的一个，这里 Ω^k，$1\leqslant k\leqslant n$，是Ω与 $\mathbf{R}^n$ 中一个 k 维超平面的交．由于线性限制算子 $i_{\Omega_0}: u\to u|_{\Omega_0}$是从 $X(\Omega)$ 到 $X(\Omega_0)$ 的有界算子［事实上 $\|i_{\Omega_0}u;\ X(\Omega_0)\|\leqslant\|u; X(\Omega)\|$］，因此对于任何一个嵌入

$$W^{m,p}(\Omega)\to X(\Omega), \tag{1}$$

利用这个限制能够产生一个嵌入

$$W^{m,p}(\Omega)\to X(\Omega_0), \tag{2}$$

并且(2)的嵌入常数不超过(1)的嵌入常数．

如果Ω满足 Sobolev 嵌入定理 5.4 的假设并且 Ω_0是有界的，那么除去某些特殊的情况之外所有的嵌入(2)（对应于定理 5.4 断言的嵌入）都是紧的．这些紧嵌入结果中最重要的部分来源于 Rellich[57] 的一个引理，对于 Sobolev 空间的情况 Kondrachov [33]给出了证明．紧嵌入在分析中有很多重要的应用，尤其是对于证明在有界区域上线性椭圆型偏微分算子谱的离散性．

在下面的定理中我们扼要的叙述 $W^{m,p}(\Omega)$的各种紧嵌入．

6.2　**定理**　(Rellich-Kondrachov 定理)　设Ω是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域，Ω_0是Ω的有界子区域，Ω^k 是Ω与 $\mathbf{R}^n$ 中一个k 维超平面的交．又设 j, m 是整数，$j\geqslant0$，$m\geqslant1$；p 是实数，$1\leqslant p<\infty$.

I　如果Ω具有锥形性质并且 $mp\leqslant n$，则下面的嵌入是紧的：

$$W^{j+m,p}(\Omega)\to W^{j,q}(\Omega_0^k),\ 0<n-mp<k\leqslant n,$$
$$1\leqslant q<kp/(n-mp), \tag{3}$$
$$W^{j+m,p}(\Omega)\to W^{j,q}(\Omega_0^k),\ \ n=mp,\ \ 1\leqslant k\leqslant n,$$
$$1\leqslant q<\infty. \tag{4}$$

II 如果Ω具有锥形性质并且 $mp>n$ 则下面的嵌入是紧的:

$$W^{j+m,p}(\Omega)\to C_B^j(\Omega_0), \tag{5}$$
$$W^{j+m,p}(\Omega)\to W^{j,q}(\Omega_0^k),\ \ 1\leqslant q\leqslant\infty. \tag{6}$$

III 如果Ω具有强局部 Lipschitz 性质则下面的嵌入是紧的:

$$W^{j+m,p}(\Omega)\to C^j(\overline{\Omega}_0),\ mp>n, \tag{7}$$
$$W^{j+m,p}(\Omega)\to C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}_0),\ mp>n\geqslant(m-1)p,$$
$$0<\lambda<m-(n/p). \tag{8}$$

IV 若Ω是$\mathbf{R}^n$中一个任意的区域,在嵌入(3)—(8)中用$W_0^{j+m,p}(\Omega)$代替 $W^{j+m,p}(\Omega)$所得到的嵌入也是紧的.

6.3 附注 (1) 若 X,Y,Z 是三个空间, 对它们我们有嵌入 $X\to Y,Y\to Z$, 如果这两个嵌入中有一个是紧的,则合成的嵌入$X\to Z$是紧的. 例如若 $Y\to Z$ 是紧的,那么X中任意一个有界序列$\{u_i\}$ 在 Y 中是有界的, 因而它就有一个子序列在 Z 中收敛.

由引理 3.22 我们知道扩张算子 $u\to\tilde{u}$ (这里 $\tilde{u}(x)=u(x)$, $x\in\Omega$; $\tilde{u}(x)=0, x\notin\Omega$.) 定义了一个嵌入 $W_0^{j+m,p}(\Omega)\to W^{j+m,p}(\mathbf{R}^n)$, 因而定理 6.2 的第 IV 部分结论可以由前面的 I—III 部分得到(取 Ω 为 $\mathbf{R}^n$).

(2) 只要对 $j=0$ 的情况证明了嵌入(3)—(8)的紧性, 那么对任意正整数 j 嵌入(3)—(8) 都是紧的, 例如假设对于嵌入(3)在 $j=0$ 的情况已经证明了它的紧性, 对于$j\geqslant1$, 考虑 $W^{j+m,p}(\Omega)$中一个有界序列$\{u_i\}$那么对每一个满足$|\alpha|\leqslant j$ 的 α, $\{D^\alpha u_i\}$是$W^{m,p}(\Omega)$中的有界集. 由假设我们知道 $\{D^\alpha u_i\}$ 在 $L^q(\Omega_0^k)$ (q 满足(3)中的条件)中是准紧的. 所以能够从 $\{u_i\}$ (用有限归纳法) 抽出一个子

序列 $\{u_i'\}$ 使得对每一个满足 $|\alpha|\leqslant j$ 的 α, $\{D^\alpha u_i'\}$ 在 $L^q(\Omega_0^k)$ 中收敛，因而 $\{u_i'\}$ 在 $W^{j,p}(\Omega_0^k)$ 中收敛，因此嵌入(3)是紧的.

(3) 由于 Ω_0 是有界的，对 $1\leqslant q<\infty$，有 $C_B^0(\Omega_0^k)\to L^q(\Omega_0^k)$；事实上 $\|u\|_{0,q,\Omega_0^k}\leqslant\|u;\ C_B^0(\Omega_0^k)\|[\mathrm{vol}_k\Omega_0^k]^{1/q}$. 因而嵌入(6)的紧性可以从嵌入(5)的紧性推出来($j=0$).

(4) 为了证明定理 6.2，若 Ω 具有锥性质总可以假设有界子集 Ω_0 也具有锥性质. 如 C 是决定 Ω 的锥性质的一个有限锥；设 $\widetilde{\Omega}$ 是所有包含在 Ω 中与 Ω_0 有非空交的与 C 全等的有限锥的并，则 $\Omega_0\subset\widetilde{\Omega}\subset\Omega$，并且 $\widetilde{\Omega}$ 是有界的，$\widetilde{\Omega}$ 具有锥性质. 若嵌入 $W^{m,p}(\Omega)\to X(\widetilde{\Omega})$ 是紧的，因此，限制在 Ω_0 上即得 $W^{m,p}(\Omega)\to X(\Omega_0)$ 也是紧嵌入.

如果 Ω 是有界的，那么在定理的叙述中 Ω_0 可以等于 Ω.

6.4 定理 6.2III 的证明 如果 $mp>n\geqslant(m-1)p$ 并且 $0<\lambda<(m-n)/p$，那么就存在一个 μ, $\lambda<\mu<m-(n/p)$. 因为 Ω_0 是有界的，由定理 1.31 我们知道嵌入 $C^{0,\mu}(\overline{\Omega}_0)\to C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}_0)$ 是紧的. 应用定理 5.4 和限制算子 有 $W^{m,p}(\Omega)\to C^{0,\mu}(\overline{\Omega})\to C^{0,\mu}(\overline{\Omega}_0)$. 利用附注 6.3(1)可知对于 $j=0$ 嵌入(8)是紧的.

如果 $mp>n$，设 j^* 是满足条件 $(m-j^*)p>n\geqslant(m-j^*-1)p$ 的非负整数，那么我们就可以得到一个嵌入串:

$$W^{m,p}(\Omega)\to W^{m-j^*,p}(\Omega)\to C^{0,\mu}(\overline{\Omega}_0)\to C(\overline{\Omega}_0),\tag{9}$$

其中 $0<\mu<m-j^*-(n/p)$. 由定理 1.31 知道(9)式中最后一个嵌入是紧的. 这样，对 $j=0$ 嵌入(7)是紧的.

6.5 定理 6.2II 的证明 如附注 6.3(4)所指明的，可以假设 Ω_0 具有锥性质. 又由于 Ω_0 是有界的，由定理 4.8 Ω_0 可以表示为下述有限和: $\Omega_0=\bigcup_{k=1}^{M}\Omega_k$，其中每个 Ω_k 有强局部 Lipschitz 性质.

如果 $mp>n$ 那么 $W^{m,p}(\Omega)\to W^{m,p}(\Omega_k)\to C(\overline{\Omega}_k)$，上面已经证明

了最后一个嵌入是紧的．若$\{u_i\}$是$W^{m,p}(\Omega)$中的一个有界序列，我们可以(对k进行有限归纳)从中抽出一个子序列$\{u'_i\}$，对每个$k(1\leqslant k\leqslant M)$，$\{u'_i\}$在$\Omega_k$上的限制在$C(\overline{\Omega}_k)$上收敛．那么$\{u'_i\}$就在$C_B^0(\Omega_0)$上收敛，这就对$j=0$证明了嵌入(5)是紧的．由附注6.3(3)可得嵌入(6)也是紧的．

6.6 引理 设Ω是$\mathbf{R}^n$中的一个区域，Ω_0是Ω的一个子区域，Ω_0^k是Ω_0与$\mathbf{R}^n$中k维超平面的交$(1\leqslant k\leqslant n)$．设对于$1\leqslant q_1<q_0$并有嵌入

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^{q_0}(\Omega_0^k), \tag{10}$$

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^{q_1}(\Omega_0^k). \tag{11}$$

又设嵌入(11)是紧的．若$q_1\leqslant q<q_0$那么嵌入

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega_0^k) \tag{12}$$

(存在并且)是紧的．

证明 令$\lambda=q_1(q_0-q)/q(q_0-q_1)$并且$\mu=q_0(q-q_1)/q(q_0-q_1)$．显然$\lambda>0$，$\mu\geqslant 0$．利用Hölder不等式和嵌入(10)，对任意$u\in W^{m,p}(\Omega)$存在一个常数$K$使：

$$\begin{aligned}\|u\|_{0,q,\Omega_0^k}&\leqslant\|u\|_{0,q_1,\Omega_0^k}^{\lambda}\|u\|_{0,q_0,\Omega_0 k}^{\mu}\\&\leqslant K\|u\|_{0,q_1,\Omega_0^k}^{\lambda}\|u\|_{m,p,\Omega}^{\mu}.\end{aligned} \tag{13}$$

若$\{u_i\}$是$W^{m,p}(\Omega)$中一有界序列，由于嵌入(11)是紧的，所以存在一个收敛的子序列$\{u'_i\}$，它也就是$L^{q_1}(\Omega_0^k)$中的一个Cauchy序列．由(13)可知$\{u'_i\}$也是$L^q(\Omega_0^k)$中的Cauchy序列，因而嵌入(12)是紧的．

6.7 定理6.2I的证明 首先我们对$j=0$的情况讨论嵌入(3)，暂时设$k=n$，$q_0=np/(n-mp)$，由引理6.6我们知道为了证明嵌入

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega_0),\quad 1\leqslant q<q_0 \tag{14}$$

是紧的，只需要对$q=1$证明嵌入(14)是紧的．对$j=1,2,3,\cdots$令

$$\Omega_j=\{x\in\Omega_0:\operatorname{dist}(x,\operatorname{bdry}\Omega)>2/j\}.$$

设S是在$W^{m,p}(\Omega)$中有界的函数集合，我们指出S（当限制在Ω_0上）满足定理 2.21 的条件以说明S在$L^1(\Omega_0)$中是准紧的. 设给定$\varepsilon>0$，对每个$u\in W^{m,p}(\Omega)$令

$$\tilde{u}(x)=\begin{cases}u(x) & x\in\Omega_0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

由 Hölder 不等式和嵌入$W^{m,p}(\Omega)\to L^{q_0}(\Omega_0)$，我们有

$$\int_{\Omega_0\sim\Omega_j}|u(x)|dx\leqslant\left\{\int_{\Omega_0\sim\Omega_j}|u(x)|^{q_0}dx\right\}^{\frac{1}{q_0}}\left\{\int_{\Omega_0\sim\Omega_j}1dx\right\}^{1-\frac{1}{q_0}}$$
$$\leqslant K_1\|u\|_{m,p,\Omega}[\operatorname{vol}(\Omega_0\sim\Omega_j)]^{1-\frac{1}{q_0}},$$

其中K_1不依赖于u. 由于Ω_0有有限体积，可以选取j足够大使得对每个$u\in S$，

$$\int_{\Omega_0\sim\Omega_j}|u(x)|dx<\varepsilon,$$

并且对每个$h\in\mathbf{R}^n$，

$$\int_{\Omega_0\sim\Omega_j}|\tilde{u}(x+h)-\tilde{u}(x)|dx<\varepsilon/2. \tag{15}$$

若$|h|<1/j$, $x\in\Omega_j$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 则$x+th\in\Omega_{2j}$，如果$u\in C^\infty(\Omega)$，可以推出

$$\int_{\Omega_j}|u(x+h)-u(x)|dx\leqslant\int_{\Omega_j}dx\int_0^1\left|\frac{du(x+th)}{dt}\right|dt$$
$$\leqslant|h|\int_0^1dt\int_{\Omega_{2j}}|\operatorname{grad}u(y)|dy$$
$$\leqslant|h|\|u\|_{1,1,\Omega_0}\leqslant K_2|h|\|u\|_{m,p,\Omega}, \tag{16}$$

这里K_2是不依赖于u的. 由于$C^\infty(\Omega)$在$W^{m,p}(\Omega)$中稠，(16)式对于$u\in W^{m,p}(\Omega)$也是成立的. 因此只要$|h|$足够小从(15)，(16)可得

$$\int_{\Omega_0}|\tilde{u}(x+h)-\tilde{u}(x)|dx<\varepsilon.$$

由定理 2.21，S在$L^1(\Omega_0)$是准紧的，那么嵌入(14)就是紧的.

下面假设 $k<n, p>1$, 可以选取一个 r 满足 $1<r<p, n-mr<k$, 令 ν 是比 mr 小的最大整数, $s=kr/(n-mr)$, $q=nr/(n-mr)$. 由于我们可以假设 Ω_0 具有锥性质, 我们从引理 5.19 证明中的不等式(35) (36) 可得

$$\begin{aligned}\|u\|_{0,1,\Omega_0^k} &\leqslant K_3\|u\|_{0,s,\Omega_0^k} \\ &\leqslant K_4\|u\|_{0,q,\Omega_0^k}^{\lambda}\|u\|_{m,r,\Omega_0}^{1-\lambda} \\ &\leqslant K_5\|u\|_{0,q,\Omega_0}^{\lambda}\|u\|_{m,p,\Omega}^{1-\lambda},\end{aligned} \tag{17}$$

这里 $\lambda=n(mr-\nu)/mr(n-\nu)$ 满足 $0<\lambda<1$, 并且常数 K_3, K_4, K_5 不依赖于 u, 注意 $1<q<q_0$. 我们已经证明了如果 $\{u_i\}$ 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的一个有界序列, 一定可以抽出一个在 $L^q(\Omega_0)$ 中收敛的子序列 $\{u_i'\}$. 由(17)式 $\{u_i'\}$ 在 $L^1(\Omega_0^k)$ 中是一个 Cauchy 序列, 因此嵌入 $W^{m,p}(\Omega)\to L^1(\Omega_0^k)$ 是紧的, 由引理 6.6 可知: 对 $1\leqslant q<kp/(n-mp)$ 嵌入 $W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega_0^k)$ 是紧的.

最后, 假设 $p=1$, $0\leqslant n-m<k<n$. 显然 $n-m+1\leqslant k<n$, 因此 $2\leqslant m\leqslant n$. 由定理 5.4 有嵌入 $W^{m,1}(\Omega)\to W^{m-1,r}(\Omega)$, 其中 $r=n/(n-1)>1$. 由上面的证明对于 $k\geqslant n-(m-1)>n-(m-1)r$ 嵌入 $W^{m-1,r}(\Omega)\to L^1(\Omega_0^k)$ 是紧的. 这就足以完成嵌入 (3) 紧性的证明.

下面我们接着证明嵌入(4)的紧性, 如果 $n=mp$, $p>1$, $1\leqslant q<\infty$, 我们可以选取 r 使得 $1\leqslant r<p, k>n-mr>0, kr/(n-mr)>q$. 仍然假设 Ω_0 具有锥性质, 我们有

$$W^{m,p}(\Omega)\to W^{m,r}(\Omega_0)\to L^q(\Omega_0^k). \tag{18}$$

在(3)中已经证明 (18) 中后面一个嵌入是紧的. 如果 $p=1, n=m\geqslant 2$, 那么取 $r=n/(n-1)>1$, 于是 $n=(n-1)r$, 对 $1\leqslant q<\infty$ 我们有

$$W^{n,1}(\Omega)\to W^{n-1,r}(\Omega)\to L^q(\Omega_0^k),$$

像(18)的证明一样可证上式后面的嵌入是紧的. 最后, 对于 $n=m$

$=p=1$, 那么必然 $k=1$. 任意取 $q_0>1$, 完全按照上面考虑的(3)式中 $k=n$ 的情形, 我们可以证明 $W^{1,1}(\Omega)\to L^1(\Omega_0)$ 的紧性. 因为当 $1\leqslant q<\infty$, $W^{1,1}(\Omega)\to L^q(\Omega_0)$, 再由引理 6.6, 所有这些嵌入是紧的. ∎

6.8 读者可以发现, 将定理 6.2 推广到定理 5.35—5.37 中给出的嵌入是有益的.

两个反例

6.9 从 Rellich-Kondrachov 定理 6.2 的叙述中产生两个非常明显的问题. 第一个问题是定理能不能推广到区域 Ω_0 是无界的情况?

第二个问题是"极端情况"

$$W^{j+m,p}(\Omega)\to W^{j,q}(\Omega_0^k),\quad 0<n-mp<k\leqslant n,\quad q=kp/(n-mp)\tag{19}$$

和

$$W^{j+m,p}(\Omega)\to C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}_0)\qquad mp>n>(m-1)p,\quad \lambda=m-(n/p)\tag{20}$$

是不是紧的?

第一个问题将在这一章的后面研究. 目前我们至少对 $k=n$ 的情况可以确切地给以否定的回答, 除掉 Ω_0 是拟有界的情况, 即除掉 Ω_0 满足

$$\lim_{\substack{x\in\Omega_0\\|x|\to\infty}}\operatorname{dist}(x,\operatorname{bdry}\Omega_0)=0$$

的情况.

6.10 例 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中无界区域, 而且 Ω 不是拟有界的. 那么就存在由 Ω 中相互分离的开球组成的序列 $\{B_i\}$, 这些开球有相同的正的半径. 设 $\phi_1\in C_0^\infty(B_1)$, 并且设 $\|\phi_1\|_{k,p,B_1}=A_{k,p}>0$ $k=0,1,$

2, …; $p\geqslant 1$ 令 φ_i 是φ_1的一个使 φ_i 的支集在 B_i 中的平移. 那么显然对于任何固定的 j, m, p, $\{\phi_i\}$ 是空间 $W_0^{j+m,p}(\Omega)$ 中的有界集 .但是对于任意一个 q

$$\|\phi_i-\phi_k\|_{j,q,\Omega}=[\|\phi_i\|^q_{j,q,B_i}+\|\phi_k\|^q_{j,q,B_k}]^{1/q}=2^{1/q}A_{j,q}>0,$$

因此$\{\phi_i\}$在$W^{j,q}(\Omega)$中不能有收敛的子序列. 因而嵌入$W_0^{j+m,p}(\Omega)\to W^{j,q}(\Omega)$不可能是紧的. 定理 6.2 其他嵌入的非紧性可以类似地证明. ▌

下面我们说明, 6.9 节中提出的第二个问题, 其答案总是否定的.

6.11 例 设Ω是 $\mathbf{R}^n$中任意一个区域, Ω_0是Ω的任一有界子区域, Ω_0^k是 $\mathbf{R}^n$ 中 k 维超平面与 Ω_0的交, 比如(不失一般性)可以认为此 k 维超平面是坐标轴 $x_1, x_2, \cdots x_k$ 所张成的. 设$\{a_1, a_2, \cdots\}$是 Ω_0^k 中的相异点列, $\{r_1, r_2\cdots\}$ $(0<r_i\leqslant 1)$是一个数列, 并且具有下面性质, $B_{r_i}(a_i)=\{x\in\mathbf{R}^n: |x-a_i|<r_i\}\subset\Omega_0$, $B_{r_i}(a_i)$ 互不相交.

设 $\phi\in C_0^\infty(B_1(0))$; 并且满足下面条件:

(i) 对每个非负正数 h, 每个实数 $q\geqslant 1$ 及每个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$我们有

$$|\phi|_{h,q,\mathbf{R}^k}=|\phi|_{h,q,\mathbf{R}^k\cap B_1(0)}$$
$$=\left\{\sum_{\substack{|\alpha|=h\\ \alpha_{k+1}=\cdots=\alpha_n=0}}\|D^\alpha\phi\|^q_{0,q,\mathbf{R}^k\cap B_1(0)}\right\}^{1/q}=A_{h,q,k}>0.$$

(ii) 存在一个 $a\in B_1(0), a\neq 0$, 对每个非负的整数 h

$$|D_1^h\phi(a)|=B_h>0. \tag{21}$$

固定 $p\geqslant 1$ 及整数 $j\geqslant 0$ 和整数 $m\geqslant 1$. 对每一个整数 i 令

$$\phi_i(x)=r_i^{j+m-n/p}\phi((x-a_i)/r_i).$$

显然 $\phi_i\in C_0^\infty(B_{r_i}(a_i))$, 通过简单的计算可得

$$|\phi_i|_{h,q,\mathbf{R}^k}=r_i^{j+m-n/p-h+k/q}A_{h,q,k}. \tag{22}$$

如果 $h\leqslant j+m$ 从(22)式及 $r_i\leqslant 1$ 可以推出

$$|\phi_i|_{h,p,\mathbf{R}^n}\leqslant A_{h,p,n},$$

因而$\{\phi_i\}$是 $W^{j+m,p}(\Omega)$ 中的一个有界序列.

假设 $mp<n$, $n-mp<k\leqslant n$, 取 $q=kp/(n-mp)$, 我们从(22)式可得到

$$\|\phi_i\|_{j,q,\Omega_0^k}\geqslant|\phi_i|_{j,q,\mathbf{R}^k}=A_{j,q,k}.$$

由于函数$\{\phi_i\}$的支集是两两不相交的,我们有

$$\|\phi_i-\phi_h\|_{j,q,\Omega_0^k}\geqslant 2^{1/q}A_{j,q,k}>0,$$

因而$\{\phi_i\}$在 $W^{j,q}(\Omega_0^k)$ 中没有收敛的子序列. 那么嵌入(19)不可能是紧的.

另一方面,设$mp>n>(m-1)p$, $\lambda=m-(n/p)$, 令$b_i=a_i+r_ia$, 由(21)式得

$$|D_1^j\phi_i(b_i)|=r_i^{m-(n/p)}|D_1^j\phi(a)|=r_i^\lambda B_j>0.$$

令 $c_i=a_i+ar_i/|a|$, 这样 $c_i\in\operatorname{bdry}B_{r_i}(a_i)$ 并且 $|b_i-c_i|=(1-|a|)r_i$. 又由于$\{\phi_i\}$的支集是两两不相交的,

$$\begin{aligned}
&\|\phi_i-\phi_h;C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}_0)\|\\
&\geqslant\max_{|\alpha|=j}\sup_{\substack{x,y\in\Omega_0\\x\neq y}}\frac{|D^\alpha(\phi_i(x)-\phi_h(x))-D^\alpha(\phi_i(y)-\phi_h(y))|}{|x-y|^\lambda}\\
&\geqslant\frac{|D_1^j\phi_i(b_i)-D_1^j\phi_h(b_i)-D_1^j\phi_i(c_i)+D_1^j\phi_h(c_i)|}{|b_i-c_i|^\lambda}\\
&=\frac{B_j}{(1-|a|)^\lambda}>0.
\end{aligned}$$

因此$\{\phi_i\}$在空间 $C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}_0)$ 中不可能有收敛的子序列,即嵌入(20)不可能是紧的. ▌

$W_0^{m,p}(\Omega)$ 在无界区域上的紧嵌入

6.12 设Ω是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个无界区域,我们将考查下面给定的嵌入

$$W_0^{m,p}(\Omega)\to L^p(\Omega) \tag{23}$$

是不是紧的，如果(23)是紧的，那由附注 6.3(2)和 6.7 节第二段可以推出嵌入

$$W_0^{j+m,p}(\Omega)\to W^{j,q}(\Omega^k),\ 0<n-mp<k\leqslant n,\ p\leqslant q<kp/(n-mp),$$

和

$$W_0^{j+m,p}(\Omega)\to W^{j,q}(\Omega^k),\ n=mp,\ 1\leqslant k\leqslant n,\ p\leqslant q<\infty$$

也是紧的.

在例 6.10 中我们已经指出除去 Ω 是拟有界的之外嵌入(23)不可能是紧的. 我们在定理 6.13 中对Ω给出一个几何条件，它充分保证嵌入(23)是紧的. 在定理 6.16 中我们对 (23) 的紧性给出一个充分必要的分析条件. 这两个定理来源于 Adams的工作[2].

令 Ω_r 表示集合 $\{x\in\Omega:|x|\geqslant r\}$. 在下面讨论中所涉及的任意的立方体$H$的表面都平行于坐标平面.

6.13 定理 令 ν 是一整数，满足 $1\leqslant\nu\leqslant n$, $mp>\nu$ (或者 $p=m=\nu=1$). 设对任给的 $\varepsilon>0$, 存在两个数 h 和 r 且 $0<h\leqslant1, r\geqslant0$ 使对每一个边长为 h 且与 Ω_r 的交非空的立方体 $H\in\mathbf{R}^n$ 有

$$\mu_{n-\nu}(H,\Omega)/h^{n-\nu}\geqslant h^p/\varepsilon,$$

其中 $\mu_{n-\nu}(H,\Omega)$ 是 $H\sim\Omega$ 在H的所有 $(n-\nu)$-维表面上投影 $P(H\sim\Omega)$的最大面积(即$(n-\nu)$-维测度), 则嵌入(23)是紧的.

6.14 上面的定理指出对给定的拟有界区域 Ω 嵌入 (23) 的紧性从本质上看依赖区域边界 bdryΩ 的维数. 我们考虑 $\nu=1$, $\nu=n$ 两种极端情况. 对于 $\nu=n$ 定理对Ω所加的条件就是Ω拟有界性这个最小限制. 因此如果 $mp>n$, 则嵌入(23) 对任意拟有界的Ω是紧的. 如果 $p>1$, Ω是拟有界区域而且其边界由没有有限聚点的孤立点构成，还可以证明除去 $mp>n$ 之外嵌入 (23) 不可能是紧的.

如果$\nu=1$，定理 6.13 的条件对 m，p 没有要求，但是要求边界 bdryΩ"实质上是 $n-1$ 维的"．任意边界是由适当规则的 $n-1$ 维曲面组成的拟有界区域，是满足此条件的．例如在 $\mathbf{R}^2$ 中一个"刺猬状"的区域（见图 5）就是这样的区域，它是由$\mathbf{R}^2$ 除去集合S_k $(k=1,2\cdots)$得到的，

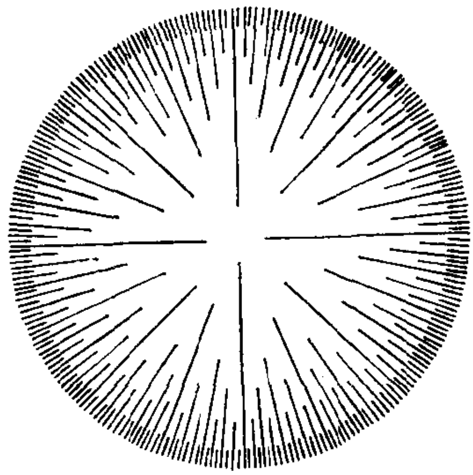


图 5 "刺猬状"的区域

$$S_k=\{(r,\theta):r\geqslant k,\ \theta=n\pi/2^k,\ n=1,2,\cdots,2^{k+1}\}.$$

注意这个区域虽然是拟有界的，但是它是单连通的，此区域的外部是空的．一般地，如果 ν 是比 mp 小的最大整数，定理 6.13 中的条件要求在某种意义上，Ω 的边界的至少 $n-\nu$ 维的部分界住一个拟有界区域．

6.15 设H是 $\mathbf{R}^n$ 中边长为 h 的正方体，E 是H的一个闭子集．对给定的 m,p 我们定义在 $C^\infty(H)$上的泛函 $I_H^{m,p}$:

$$I_H^{m,p}(u)=\sum_{1\leqslant j\leqslant m}h^{jp}|u|_{j,p,H}^p=\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}h^{|\alpha|p}\int_H|D^\alpha u(x)|^p dx.$$

我们用 $C^{m,p}(H,E)$表示E在H中的"$(m-p)$-容量"，$C^{m,p}(H,E)$是这样定义的:

$$C^{m,p}(H,E)=\inf_{u\in C^\infty(H,E)}\frac{I_H^{m,p}(u)}{\|u\|_{0,p,H}^p}$$

其中 $C^\infty(H,E)$是所有 $C^\infty(H)$ 中在E的一个邻域等于零的函数 u 组成的集合．显然 $C^{m,p}(H,E)\leqslant C^{m+1,p}(H,E)$，并且对于 $E\subset F\subset H$ 有 $C^{m,p}(H,E)\leqslant C^{m,p}(H,F)$.

定理 6.13 可以简化为下面定理的形式，此定理利用区域的"$(m-p)$-体积"做为嵌入(23)紧性的条件．

6.16 定理 嵌入 (23) 是紧的充分必要条件是 Ω 满足下面条

件：对任给 $\varepsilon>0$ 存在 $h\leqslant 1, r\geqslant 0$，使对任意以 h 为边长，与 Ω_r 的交是非空的 n 维正方体 H 满足不等式

$$C^{m,p}(H, H\sim\Omega)\geqslant h^p/\varepsilon.$$

（显然这个条件包括了 Ω 是一个拟有界区域．）

6.17 引理 对任意以 h 为边长的 n 维-正方体 H 及 H 的任意一个体积为正的可测子集 A，和任意的 $u\in C^1(H)$ 存在一个常数 $K=K(n, p)$ 使下面不等式成立：

$$\|u\|_{0,p,H}^p\leqslant\frac{2^{p-1}h^n}{\mathrm{vol}A}\|u\|_{0,p,A}^p+K\frac{h^{n+p}}{\mathrm{vol}A}\|\mathrm{grad}u\|_{0,p,H}^p. \qquad (24)$$

证明 令 $y\in A, x=(\rho, \phi)\in H$，其中 (ρ, ϕ) 是以 y 为原点的球极坐标，其中体积元由 $dx=\omega(\phi)\rho^{n-1}d\rho d\phi$ 给出，H 的边界用 $\rho=f(\phi)$，$\phi\in\Sigma$ 表示，显然 $f(\phi)\leqslant\sqrt{n}h$．因为

$$u(x)=u(y)+\int_0^\rho\frac{d}{dr}u(r, \phi)dr,$$

利用 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\int_H|u(x)|^pdx&\leqslant 2^{p-1}|u(y)|^ph^n+2^{p-1}\int_H\left|\int_0^\rho\frac{d}{dr}u(r, \phi)dr\right|^pdx\\
&\leqslant 2^{p-1}h^n|u(y)|^p+2^{p-1}\int_\Sigma\omega(\phi)d\phi\int_0^{f(\phi)}\rho^{n+p-2}d\rho\\
&\qquad\times\int_0^\rho|\mathrm{grad}u(r, \phi)|^pdr\\
&\leqslant 2^{p-1}h^n|u(y)|^p+\frac{2^{p-1}}{n+p-1}(\sqrt{n}h)^{n+p-1}\int_H\frac{|\mathrm{grad}u(z)|^p}{|z-y|^{n-1}}dz.\end{aligned}$$

由上式在 A 上对 y 积分，用引理 5.47 可得

$$(\mathrm{vol}A)\|u\|_{0,p,H}^p\leqslant 2^{p-1}h^n\|u\|_{0,p,A}^p+Kh^{n+p}\int_H|\mathrm{grad}u(x)|^pdx,$$

由此可立刻得到(24)式．▌

6.18 定理 6.16 的证明 （必 要 性） 设 Ω 不满足定理中所叙述的条件．那么就存在一个有限的常数 $K_1=1/\varepsilon$，使得对每一个 h

$(0<h\leqslant1)$都可以找到一个边长为h的正方体序列$\{H_j\}$，$\{H_j\}$中的正方体与Ω都是相交的，而且它们之间是两两不相交的；满足

$$C^{m,p}(H_j, H_j\sim\Omega)<K_1h^p.$$

由"$m-p$-容量"的定义可知对于每一个H_j存在$u_j\in C^\infty(H_j, H_j\sim\Omega)$使得$\|u_j\|_{0,p,H_j}^p=h^n$，$\|\mathrm{grad}u_j\|_{0,p,H_j}^p\leqslant K_1h^n$并且$\|u_j\|_{m,p,H_j}^p\leqslant K_2(h)$. 令$A_j=\{x\in H_j;\ |u_j(x)|<\frac{1}{2}\}$. 由引理 6.17 可得

$$h^n\leqslant\frac{2^{p-1}h^n}{\mathrm{vol}A_j}\cdot\frac{\mathrm{vol}A_j}{2^p}+\frac{KK_1}{\mathrm{vol}A_j}h^{2n+p},$$

由上式可得$\mathrm{vol}A_j\leqslant K_3h^{n+p}$. 我们选取$h$充分小使$K_3h^p<\frac{1}{3}$，这样$\mathrm{vol}A_j\leqslant\frac{1}{3}\mathrm{vol}H_j$. 在$C_0^\infty(H_j)$中选取函数$w_j$，使在$H_j$的子集$S_j$($S_j$的体积不小于$H_j$的$\frac{2}{3}$)上$w_j(x)=1$，并满足

$$\sup_j\max_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in H_j}|D^\alpha w_j(x)|=K_4<\infty.$$

那么$v_j=u_jw_j\in C_0^\infty(H_j\cap\Omega)\subset C_0^\infty(\Omega)$并且在$S_j\cap(H_j\sim A_j)$上$|v_j(x)|\geqslant\frac{1}{2}$，$S_j\cap(H_j\sim A_j)$的体积不小于$h^n/3$，因此$\|v_j\|_{0,p,H_j}^p\geqslant h^n/3\cdot2^p$. 另一方面，如果$|\alpha|,|\beta|\leqslant m$，

$$\int_{H_j}|D^\alpha u_j(x)|^p\cdot|D^\beta w_j(x)|^p dx\leqslant K_4^pK_2(h).$$

因此$\{v_j\}$是$W_0^{m,p}(\Omega)$中的有界序列. 由于函数v_j的支集是相互不交的，则有$\|v_j-v_k\|_{0,p,\Omega}^p\geqslant2h^n/3\cdot2^p$因而嵌入(23)不可能是紧的.

(充分性) 现在我们假设Ω满足定理中叙述的条件. 对任给的$\varepsilon>0$都可以找到$r\geqslant0$，$h\leqslant1$使每一个边长为h与Ω_r相交的正方体有$C^{m,p}(H, H\sim\Omega)\geqslant h^p/\varepsilon^p$. 那么对每个函数$u\in C_0^\infty(\Omega)$我们可得

$$\|u\|_{0,p,H}^p \leqslant (\varepsilon^p/h^p) I_H^{m,p}(u) \leqslant \varepsilon^p \|u\|_{m,p,H}^p.$$

由于 Ω_r 的某一邻域可以分割成这样一些正方体，由上式的和可得

$$\|u\|_{0,p,\Omega_r} \leqslant \varepsilon \|u\|_{m,p,\Omega}.$$

那么由定理2.22和6.2立刻可以推出 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 中的任意有界集 S 在 $L^p(\Omega)$ 中是准紧的. ▌

6.19 引理 对 $\mathbf{R}^n$ 中边长为 h 的任意正方体 H，存在一个不依赖于 h 的常数 K 对每一个满足 $p \leqslant q \leqslant np/(n-mp)$ 的 q（如果 $n=mp$, $p \leqslant q < \infty$; 如果 $n < mp$, $p \leqslant q \leqslant \infty$）及任意 $u \in C^\infty(H)$ 有下面不等式成立

$$\|u\|_{0,q,H} \leqslant K \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant m} h^{|\alpha|p-n+np/q} \|D^\alpha u\|_{0,p,H}^p \right\}^{1/p}. \qquad (25)$$

证明 我们可以假设 H 的中心在坐标原点，以 $\widetilde{H}$ 表示与 H 有相同中心、边长为单位的正方体，对于 $\widetilde{H}$ 由 Sobolev 嵌入定理，不等式(25)是成立的. 对于每一个 $u \in C^\infty(H)$ 我们对应地定义一个 $\tilde{u} \in C^\infty(\widetilde{H})$, $\tilde{u}(y) = u(x)$, 其中 $x = hy$. 因而有

$$\left\{ \int_{\widetilde{H}} |\tilde{u}(y)|^q dy \right\}^{1/q} \leqslant K \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{\widetilde{H}} |D_y^\alpha \tilde{u}(y)|^p dy \right\}^{1/p},$$

由自变量的代换可得

$$h^{-n/q} \left\{ \int_H |u(x)|^q dx \right\}^{1/q} \leqslant K \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant m} h^{|\alpha|p-n} \int_H |D_x^\alpha u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

由此即得(25)式. ▌

6.20 引理 假设 $mp > n$（或者 $m=p=n=1$），那么对 $\mathbf{R}^n$ 中任意边长为 h 的正方体 H，及 $C^\infty(H)$ 中在 H 内某一点 y 的邻域内等于零的函数 u，存在一个常数 $K = K(m,p,n)$ 满足

$$\|u\|_{0,p,H}^p \leqslant K I_H^{m,p}(u).$$

证明 这个证明与引理5.15的证明有点相似. 首先设 $p \leqslant n < mp$, (ρ, ϕ) 表示中心在点 y 的极坐标. 那么

$$u(\rho,\phi)=\int_0^\rho \frac{d}{dt}u(t,\phi)dt.$$

如果 $n>(m-1)p$, 令 $q=np/(n-mp+p)$，这样 $q>n$. 其他情况我们令 $q>n$ 是任意的. 若$(\rho,\phi)\in H$, 由 Hölder 不等式可得

$$|u(\rho,\phi)|^q\rho^{n-1}\leqslant(\sqrt{n}h)^{n-1}\int_0^\rho\left|\frac{d}{dt}u(t,\phi)\right|^q t^{n-1}dt$$

$$\times\left\{\int_0^{\sqrt{n}h} t^{-(n-1)/(q-1)}dt\right\}^{q-1}$$

$$\leqslant K_1h^{q-1}\int_0^\rho\left|\frac{d}{dt}u(t,\phi)\right|^q t^{n-1}dt.$$

以 $m-1$ 代替 m 利用引理 6.19 可以推出

$$\|u\|_{0,q,H}^q\leqslant K_2h^q\int_H|\mathrm{grad}u(x)|^q dx$$

$$\leqslant K_2h^q\sum_{|\alpha|=1}\|D^\alpha u\|_{0,q,H}^q$$

$$\leqslant K_3h^q\sum_{|\alpha|=1}\left\{\sum_{|\beta|\leqslant m-1}h^{|\beta|p-n+np/q}\|D^{\alpha+\beta}u\|_{0,p,H}^p\right\}^{q/p}. \quad (26)$$

进一步应用 Hölder 不等式得

$$\|u\|_{0,p,H}^p\leqslant\|u\|_{0,q,H}^p(\mathrm{vol}H)^{(q-p)/q}$$

$$\leqslant K_3^{p/q}\sum_{1\leqslant|\gamma|\leqslant m}h^{|\gamma|p}\|D^\gamma u\|_{0,p,H}^p=KI_H^{m,p}(u).$$

对于 $p>n$(或者 $p=n=1$)可以由(26) 式取 $q=p$ 直接得到引理的结果

$$\|u\|_{0,p,H}^p\leqslant KI_H^{1,p}(u)\leqslant KI_H^{m,p}(u). \blacksquare$$

6.21 定理 6.13 的证明 设H是具有下面性质的正方体，对 $mp>\nu$(或 $m=p=\nu=1$) $\mu_{n-\nu}(H,\ \Omega)/h^{n-\nu}\geqslant h^p/\varepsilon$. 设$P$是定理中所叙述的最大投影, $E=P(H\sim\Omega)$. 不失一般性，我们可以设包含 E 的H的$(n-\nu)$维表面F是平行于坐标平面 $x_{\nu+1},\cdots,x_n$ 的. 对于 E 中的每个点 $x=(x',x'')$, 其中 $x'=(x_1,\cdots,x_\nu)$, $x''=(x_{\nu+1},\cdots,x_n)$,

以 $H_{x''}$ 表示具有下面性质的边长为 h 的 ν-维立方体，它是过点 x 垂直于 F 的 ν 维平面与 H 的交. 由 P 的定义我们知道存在一个 $y\in H_{x''}\sim\Omega$. 如果 $u\in C^\infty(H, H\sim\Omega)$，那么 $u(\cdot, x'')\in C^\infty(H_{x''}, y)$. 对 $u(\cdot, x'')$ 应用引理 6.20，我们可得

$$\int_{H_{x''}}|u(x', x'')|^p dx'$$

$$\leqslant K_1\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}|h|^{|\alpha|p}\int_{H_{x''}}|D^\alpha u(x', x'')|^p dx',$$

其中 K_1 不依赖于 h, x'' 及 u. 对上面不等式在 E 上积分，记

$$H'=\{x' : x=(x', x'')\in H \text{ 对某些 } x''\},$$

我们可得到

$$\|u\|^p_{0,p,H'\times E}\leqslant K_1 I^{m,p}_{H'\times E}(u)\leqslant K_1 I^{m,p}_H(u).$$

再应用引理 6.17，取 $A=H'\times E$，这样 $\operatorname{vol}A=h^\nu\mu_{n-\nu}(H, \Omega)$. 这就得

$$\|u\|^p_{0,p,H}\leqslant K_2\frac{h^{n-\nu}}{\mu_{n-\nu}(H, \Omega)}I^{m,p}_H(u).$$

其中 K_2 不依赖于 h. 由此可以推出

$$C^{m,p}(H, H\sim\Omega)\geqslant\frac{\mu_{n-\nu}(H, \Omega)}{K_2 h^{n-\nu}}\geqslant\frac{h^p}{\varepsilon K_2}.$$

因此如果 Ω 满足定理 6.13 中的假设，则它满足定理 6.16 的假设. ▌

下面两个关于插值的引理使我们能够将定理 6.13 推广为空间 $W^{m,p}_0$ 到连续函数空间的嵌入.

6.22 引理 设 $1\leqslant p<\infty$ 并且 $0<\mu\leqslant 1$，则存在一个常数 $K=K(n, p, \mu)$ 对任意 $u\in C^\infty_0(\mathbf{R}^n)$ 有

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|u(x)|\leqslant K\|u\|_{0,p,\mathbf{R}^n}\left\{\sup_{\substack{x,y\in\mathbf{R}^n\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\mu}\right\}^{1-\lambda}, \tag{27}$$

其中 $\lambda=p\mu/(n+p\mu)$.

证明 我们可以设

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|u(x)|=N>0,\ \sup_{x,y\in\mathbf{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\mu}=M<\infty.$$

令 ε 满足 $0<\varepsilon\leqslant N/2$. 则存在一个点 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 使 $|u(x_0)|\geqslant N-\varepsilon\geqslant N/2$. 由于对所有的 $x\in\mathbf{R}^n$, $|u(x_0)-u(x)|/|x_0-x|^\mu\leqslant M$, 因此对满足 $|x-x_0|\leqslant(N/4M)^{1/\mu}=r$ 的 x 有下式成立:

$$|u(x)|\geqslant|u(x_0)|-M|x_0-x|^\mu\geqslant\frac{1}{2}|u(x_0)|.$$

因此

$$\int_{\mathbf{R}^n}|u(x)|^p dx\geqslant\int_{B_r(x_0)}\left(\frac{|u(x_0)|}{2}\right)^p dx$$

$$\geqslant K_1\left(\frac{N-\varepsilon}{2}\right)^p\left(\frac{N}{4M}\right)^{n/\mu}.$$

由于上式对任意小的 $\varepsilon>0$ 成立, 所以我们有

$$\|u\|_{0,p,\mathbf{R}^n}\geqslant(K_1^{1/p}/2\cdot 4^{n/\mu p})N^{1+n/\mu p}M^{-n/\mu p},$$

由此可立即得到(27)式.▌

6.23 引理 设Ω是 $\mathbf{R}^n$ 中一个任意区域, $0<\lambda<\mu\leqslant 1$, 对于任意函数 $u\in C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$我们有

$$\|u;C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})\|\leqslant 3^{1-\lambda/\mu}\|u;C(\overline{\Omega})\|^{1-\lambda/\mu}\|u;C^{0,\mu}(\overline{\Omega})\|^{\lambda/\mu}. \tag{28}$$

证明 令 $p=\mu/\lambda$, $p'=p/(p-1)$,

$$A_1=\|u;C(\overline{\Omega})\|^{1/p},\quad B_1=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}}\left\{\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\mu}\right\}^{1/p},$$

$$A_2=\|u;C(\overline{\Omega})\|^{1/p'},\quad B_2=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}}|u(x)-u(y)|^{1/p'}.$$

显然 $A_1^p+B_1^p=\|u;C^{0,\mu}(\overline{\Omega})\|$, $B_2^{p'}\leqslant 2\|u;C(\overline{\Omega})\|$, 我们有

$$\|u;C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})\|=\|u;C(\overline{\Omega})\|+\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

$$\leqslant A_1A_2+B_1B_2$$

$$\leqslant \{A_1^p + B_1^p\}^{\frac{1}{p}} \{A_2^{p'} + B_2^{p'}\}^{1/p'}$$
$$\leqslant \|u; C^{0,\mu}(\overline{\Omega})\|^{\lambda/\mu}(3\|u; C(\overline{\Omega})\|)^{1-\lambda/\mu}.$$

这就是所要证明的. ▌

6.24 定理 若Ω满足定理 6.13 的条件,则下面的嵌入是紧的:

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \to C^j(\overline{\Omega}), \quad 当\ mp > n \tag{29}$$

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \to C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \quad 当\ mp > n \geqslant (m-1)p\ 及\ 0 < \lambda < m - (n/p). \tag{30}$$

证明 只要对 $j=0$ 的情况进行证明即可得定理的结论. 若 $mp > n$, 设 j^*是满足$(m-j^*)p > n \geqslant (m-j^*-1)p$ 的非负整数. 那么我们有下面的嵌入串

$$W_0^{m,p}(\Omega) \to W_0^{m-j^*,p}(\Omega) \to C^{0,\mu}(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega}),$$

其中 $0 < \mu < m - j^* - (n/p)$. 如果$\{u_i\}$是 $W_0^{m,p}(\Omega)$中的有界序列,那么$\{u_i\}$也是 $C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$中的有界序列. 由定理 6.13$\{u_i\}$有一个子序列$\{u_i'\}$在 $L^p(\Omega)$中是收敛的, 利用(27)式(用完备化的方法(27)式也可以应用于函数 u_i)可知$\{u_i'\}$是$C(\overline{\Omega})$中的Cauchy序列, 因而它是收敛的. 因而对于 $j=0$ 嵌入(29)是紧的. 此外, 对于 $mp > n \geqslant (m-1)p$(即 $j^*=0$), $0 < \lambda < \mu$ 由 (28) 式 $\{u_i'\}$ 是空间 $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$中的一个 Cauchy 序列, 因而嵌入(30)也是紧的. ▌

$W_0^{m,p}(\Omega)$的一个等价范数

6.25 确定对于怎样的无界区域Ω嵌入 $W_0^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ 是紧的这个问题与确定Ω是一个怎样的区域, 半范数$|\cdot|_{m,p,\Omega}$, 即

$$|u|_{m,p,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{0,p,\Omega}^p \right\}^{1/p}$$

实际是 $W_0^{m,p}(\Omega)$的范数(也就是等价于范数$\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$)这个问题有密切的联系. 对于任何有界区域的情况现在我们证明上面给出的半范数的确是 $W_0^{m,p}(\Omega)$的一个等价范数.

6.26 一个区域 $\Omega\in\mathbf{R}^n$，如果它是在两个平行的超平面之间我们说它有有限宽．设Ω是有有限宽的区域，不失一般性可认为它是在超平面 $x_n=0$ 和 $x_n=d$ 之间．令 $x=(x',x_n)$，其中 $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$，对任意的 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\phi(x)=\int_0^{x_n}\frac{d}{dt}\phi(x',t)\,dt,$$

因此

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{0,p,\Omega}^p&=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}dx'\int_0^d|\phi(x)|^p dx_n\\&\leqslant\int_{\mathbf{R}^{n-1}}dx'\int_0^d x_n^{p-1}dx_n\int_0^d|D_n\phi(x',t)|^p dt\\&\leqslant(d^p/p)\,|\phi|_{1,p,\Omega}^p,\end{aligned}\tag{31}$$

并且

$$|\phi|_{1,p,\Omega}^p\leqslant\|\phi\|_{1,p,\Omega}^p=\|\phi\|_{0,p,\Omega}^p+|\phi|_{1,p,\Omega}^p\leqslant(1+(d^p/p))\,|\phi|_{1,p,\Omega}^p.$$

对导数 $D^\alpha\phi$，$|\alpha|\leqslant m-1$，连续地应用上面的不等式，推出

$$|\phi|_{m,p,\Omega}\leqslant\|\phi\|_{m,p,\Omega}\leqslant K|\phi|_{m,p,\Omega},\tag{32}$$

利用完备性，(32)式对所有 $u\in W_0^{m,p}(\Omega)$ 成立．不等式(31)通常称为 Poincare 不等式．

6.27 $\mathbf{R}^n$ 中的无界区域 Ω，若

$$\lim_{x\in\Omega}\sup_{|x|\to\infty}\operatorname{dist}(x,\operatorname{bdry}\Omega)<\infty,$$

则称Ω是拟柱形的，显然任意一个拟有界区域正如同每一个(无界的)有限宽的区域一样也是拟柱形的，读者可以自己去构造一个反例证明若Ω不是一个拟柱形的区域那么 $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ 与 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的范数是不等价的．下面的定理类似于定理 6.13.

6.28 定理 设存在满足下面条件的常数K,R,h 和 ν：$0<K\leqslant1$，$0\leqslant R<\infty$，$0<h<\infty$，$1\leqslant\nu\leqslant n$，ν 是一个整数，$\nu<p$ 或者$\nu=p=1$，对于每一个 $\mathbf{R}^n$ 中边长为h 且与 $\Omega_R=\{x\in\Omega,\ |x|\geqslant R\}$ 有非空交的正方体H有

$$\mu_{n-\nu}(H,\Omega)/h^{n-\nu}\geqslant K,$$

其中$\mu_{n-\nu}(H,\Omega)$如定理 6.13 的叙述中所定义的那样. 则$|\cdot|_{m,p,\Omega}$与$\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$是空间$W_0^{m,p}(\Omega)$的等价范数.

证明 从第 6.26 节讨论中我们知道, 为了证明定理的结论只需对于$u\in C_0^\infty(\Omega)$证明$\|u\|_{0,p,\Omega}\leqslant K_1|u|_{1,p,\Omega}$. 设$H$是边长为$h$与$\Omega_R$有非空交的立方体, 由于$\nu<p$(或者$\nu=p=1$)定理 6.13 的证明(6.21 节)中已指出对所有$u\in C_0^\infty(H)$

$$C^{1,p}(H,H\sim\Omega)\geqslant\mu_{n-\nu}(H,\Omega)/K_2h^{n-\nu}\geqslant K/K_2$$

K_2不依赖于函数u. 因而

$$\|u\|_{0,p,H}^p\leqslant(K_2/K)I_H^{1,p}(u)=K_3|u|_{1,p,H}^p. \tag{33}$$

将(33)式对包含Ω_R的某个邻域的田字形划分中的所有正方体H求和, 得

$$\|u\|_{0,p,\Omega_R}^p\leqslant K_3|u|_{1,p,\Omega}^p. \tag{34}$$

余下来的是要证明

$$\|u\|_{0,p,B_R}^p\leqslant K_4|u|_{1,p,\Omega}^p,$$

其中$B_R=\{x\in\mathbf{R}^n:|x|<R\}$. 设$(\rho,\phi)$表示$\mathbf{R}^n$中一点$x$的球坐标$(\rho\geqslant0,\phi\in\Sigma)$, $dx=\rho^{n-1}\omega(\phi)d\rho d\phi$表示体积元. 对空间$C^\infty(\mathbf{R}^n)$中的任意一个函数, 我们有

$$u(\rho,\phi)=u(\rho+R,\phi)-\int_\rho^{R+\rho}\frac{d}{dt}u(t,\phi)dt,$$

所以

$$|u(\rho,\phi)|^p\leqslant2^{p-1}|u(\rho+R,\phi)|^p$$
$$+2^{p-1}R^{p-1}\rho^{1-n}\int_\rho^{R+\rho}|\mathrm{grad}u(t,\phi)|^pt^{n-1}dt,$$

因此得

$$\|u\|_{0,p,B_R}^p=\int_\Sigma\omega(\phi)d\phi\int_0^R|u(\rho,\phi)|^p\rho^{n-1}d\rho$$

$$\leqslant 2^{p-1}\int_{\Sigma}\omega(\phi)d\phi\int_0^R|u(\rho+R,\phi)|^p(\rho+R)^{n-1}d\rho$$

$$+2^{p-1}R^p\int_{\Sigma}\omega(\phi)d\phi\int_0^{2R}|\text{grad}u(t,\phi)|^pt^{n-1}dt.$$

所以由(34)对于 $u\in C_0^\infty(\Omega)$ 我们可得

$$\|u\|_{0,p,B_R}^p\leqslant 2^{p-1}\|u\|_{0,p,B_{2R}\sim B_R}^p+2^{p-1}R^p|u|_{1,p,B_{2R}}^p$$
$$\leqslant 2^{p-1}\|u\|_{0,p,\Omega_R}^p+2^{p-1}R^p|u|_{1,p,\Omega}^p\leqslant K_4|u|_{1,p,\Omega}^p. \blacksquare$$

无界区域——在无穷远处的衰减

6.29 在我们对某些无界区域建立嵌入

$$W_0^{m,p}(\Omega)\longrightarrow L^p(\Omega) \tag{35}$$

的紧性时，空间 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的元素在 Ω 的边界等于零(在某种推广的意义下)起着关键作用. 对于 $W^{m,p}(\Omega)$ 的元素不再有这个性质，还留下这样一个问题：什么时候嵌入(如果存在的话)

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^p(\Omega) \tag{36}$$

对无界的 Ω 是紧的？或者甚至对有界的、相当不规则的以至不存在嵌入

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega) \tag{37}$$

(对任意的 $q>p$)的区域 Ω 嵌入(36)是紧的？

注意如果 Ω 有有限体积，对某个 $q>p$ 嵌入(37)存在，用 6.7 节第一部分中的方法可以证明嵌入(36)的紧性. 但由定理5.30可知对 $q>p$，Ω 是有有限体积的无界界区域嵌入(37)是不能存在的.

6.30 例 对 $j=1,2,\cdots$ 令 B_j 表示 $\mathbf{R}^n$ 中半径为 r_j 的开球，并且假设当 $j\neq K$ 时 $\bar{B}_j\cap\bar{B}_K$ 是空集. 记 $\Omega=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j$；$\Omega$ 可以是有界的也可以是无界的. 定义一个函数序列 $\{u_j\}$

$$u_j(x)=\begin{cases}(\mathrm{vol}B_j)^{-1/p}, & x\in\bar{B}_j,\\ 0 & x\notin\bar{B}_j,\end{cases}$$

显然$\{u_j\}$在$W^{m,p}(\Omega)$中是有界的，但是当j趋于无穷大，无论$r_j\to 0$怎样快，$\{u_j\}$在$L^p(\Omega)$都不是准紧的。因此嵌入(36)不可能是紧的。（注意由定理 6.13 我们知道当$\lim\limits_{j\to\infty}r_j=0$时嵌入(35)是紧的.）如果$\Omega$是有界的对任意$q>p$嵌入(37)是不可能存在的.

6.31 使得嵌入(36)是紧的无界区域是存在的(参看 6.48节). Adams 和 Fournier[3]给出了这样区域的一个例子，并且 Adams 和 Fournier 在工作[4]为一般问题的研究打下了基础. 后一文章的方法在下一节将要用到. 首先我们考虑嵌入(37)紧性的必要条件. 这些条件包括对任意无界区域在无穷远处的快速衰减（见定理 6.40）. 在证明中运用这些技巧我们可以得到一个比定理 5.30 的说法更强的定理(即定理6.36)和这个断言的逆命题(参看附注 5.5(6))，

如果Ω有有限体积则对$1\leqslant q<p$有嵌入

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega).$$

嵌入(36)紧性的充分条件将在定理 6.47 中给出. 这个条件可应用到很多有界和无界的区域，可用到 Rellich-Kondachov 定理及其推广所不能用的区域(即指数尖点——参看例 6.49).

6.32 设T是由边长为h的闭n-正方体组成的$\mathbf{R}^n$的一个田字形划分，若H是T中的一个正方体，用$N(H)$表示以$3h$为边长与H有相同中心的正方体，其表面与H的表面平行. 称$N(H)$为H的邻域. 显然$N(H)$是T中3^n个与H相交的正方体的并，将

$$F(H)=N(H)\sim H$$

称为H的边框.

设Ω是$\mathbf{R}^n$中的一个区域，T是上面给定的田字形划分，设$\lambda>0$. 如果T中的正方体H满足

$$\mu(H\cap\Omega)>\lambda\mu(F(H)\cap\Omega),$$

则称H是λ-丰满的(关于区域Ω),这里μ表示$\mathbf{R}^n$中的n维Lebesgue测度(为了记法的简单我们用μ代替"vol",在下面的讨论中这个记号多次用到.)如果H不是λ-丰满的则称H为λ-窄小的.

6.33 定理 假设存在一个紧嵌入

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega), \tag{38}$$

其中$q\geqslant p$. 则对任意的$\lambda>0$和$\mathbf{R}^n$的任意一个由固定边长的正方体组成的田字形划分T,只有有限多个λ-丰满的正方体.

证明 若定理不成立,则对每个$\lambda>0$存在$\mathbf{R}^n$的边长为h的正方体组成的田字形划分,它包含有一个λ-丰满的正方体序列$\{H_j\}_{j=1}^{\infty}$. 如有必要,抽取子序列,我们总可以假设$N(H_j)\cap N(H_k)=\phi$, $j\neq k$. 对每一个j存在一个具有下面性质的函数$\phi_j\in C_0^{\infty}(N(H_j))$

(i) $|\phi_j(x)|\leqslant 1$, 对所有$x\in\mathbf{R}^n$,

(ii) $\phi_j(x)=1$, 如果$x\in H_j$,

(iii) $|D^\alpha\phi_j(x)|\leqslant M$, 对所有$x\in\mathbf{R}^n$及$0\leqslant|\alpha|\leqslant m$,

其中$M=M(n,m,h)$是与j无关的常数. 令$\psi=c_j\phi_j$, 其中正常数c_j根据下面条件选取:

$$\|\psi_j\|_{0,q,\Omega}^q\geqslant c_j^q\int_{H_j\cap\Omega}|\phi_j(x)|^q dx=c_j^q\mu(H_j\cap\Omega)=1.$$

然而因为H_j是λ-丰满的

$$\begin{aligned}\|\psi_j\|_{m,p,\Omega}^p&=c_j^p\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\int_{N(H_j)\cap\Omega}|D^\alpha\phi_j(x)|^p dx\\&\leqslant M^p c_j^p\mu(N(H_j)\cap\Omega)\\&<M^p c_j^p\mu(H_j\cap\Omega)[1+(1/\lambda)]\\&=M^p[1+(1/\lambda)]c_j^{p-q},\end{aligned}$$

而$\mu(H_j\cap\Omega)\leqslant\mu(H_j)=h^n$, 这样$c_j\geqslant h^{-n/q}$, 又由于$p-q\leqslant 0$, 由上式可得$\{\psi_j\}$是$W^{m,p}(\Omega)$中的有界集. 又因为函数$\psi_j$的

支集是两两不相交的，$\{\psi_j\}$ 在 $L^q(\Omega)$ 中不可能是准紧的. 这就与嵌入 (38) 的紧性产生矛盾. 因此 T 只能有有限个 λ-丰满的正方体. ∎

6.34 推论 设对某个 $q>p$ 嵌入(38)是存在的. 若 T 是边长为 h 的正方体组成的 $\mathbf{R}^n$ 的一个田字形划分，如果给定的 $\lambda>0$ 则存在一个 $\varepsilon>0$ 使得对所有 T 中 λ-丰满的 H 满足 $\mu(H\cap\Omega)\geqslant\varepsilon$

证明 若不然则存在 λ-丰满的正方体序列 $\{H_j\}$，而 $\lim\limits_{j\to\infty}\mu(H_j\cap\Omega)=0$. 如果 c_j 如上面证明中所定义的那样，我们有 $\lim\limits_{j\to\infty}c_j=\infty$，由于 $p<q$，则 $\lim\limits_{j\to\infty}\|\psi_j\|_{m,p,\Omega}=0$. 又因在空间 $L^q(\Omega)$ 中 $\{\psi_j\}$ 与 0 的距离是大于 1 的，这就与嵌入(38)的连续性矛盾. ∎

6.35 让我们进一步考查上面推论所包含的意思. 如果对某个 $q>p$ 嵌入(38)存在则下面两个结论中必有一个成立.

(a) 存在 $\mathbf{R}^n$ 中的由固定边长的正方体组成的 $\mathbf{R}^n$ 的田字形划分 T 和 $\varepsilon>0$ 使对 T 中无穷多个 H 满足

$$\mu(H\cap\Omega)\geqslant\varepsilon.$$

(b) 对任意 $\lambda>0$ 及对任意由固定边长的正方体组成的 $\mathbf{R}^n$ 的田字形划分 T, T 中仅包含有限个 λ-丰满的正方体.

我们将在定理 6.37 中证明结论(b)包含了 Ω 有有限的体积. 由定理 5.30 因而(b)与对 $q>p$ 嵌入(38)存在是矛盾的. 另一方面条件(a)意味着当 N 趋向无穷时 $\mu(\{x\in\Omega:N\leqslant|x|\leqslant N+1\})$ 不趋向于零. 所以我们证明了下面比定理 5.30 更强的定理.

6.36 定理 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个无界区域，满足条件

$$\lim_{N\to\infty}\sup\ \mathrm{vol}\{x\in\Omega:N\leqslant|x|\leqslant N+1\}=0.$$

则对任意的 $q>p$，嵌入(38)是不存在的.

6.37 定理 假设嵌入(38)对于某个 $q\geqslant p$ 是紧的. 则 Ω 有有限的体积.

证明 设T是由边长为1的立方体组成的 $\mathbf{R}^n$ 的田字形划分，取 $\lambda=1/[2(3^n-1)]$．令P是T中有限个λ-丰满的正方体的和，显然 $\mu(P\cap\Omega)\leqslant\mu(P)<\infty$．设$H$是一个$\lambda$-窄小的正方体．又设$H_1$是包含在边框$F(H)$中$3^n-1$个正方体中的一个且使 $\mu(H_1\cap\Omega)$ 为最大．因此

$$\mu(H\cap\Omega)\leqslant\lambda\mu(F(H)\cap\Omega)\leqslant\lambda(3^n-1)\mu(H_1\cap\Omega)$$
$$=\frac{1}{2}\mu(H_1\cap\Omega).$$

如果H_1也是λ-窄小的，我们可以选取 $H_2\in T$, $H_2\subset F(H_1)$ 使得

$$\mu(H_1\cap\Omega)\leqslant\frac{1}{2}\mu(H_2\cap\Omega).$$

假设可以用上面方法得到一个无限λ-窄小的正方体序列 $\{H, H_1$ $H_2\cdots\}$那么

$$\mu(H\cap\Omega)\leqslant\frac{1}{2}\mu(H_1\cap\Omega)\leqslant\cdots\leqslant(1/2^j)\mu(H_j\cap\Omega)$$
$$\leqslant1/2^j$$

对任意的j成立(因为 $\mu(H_j\cap\Omega)\leqslant\mu(H_j)\leqslant1$)．因此 $\mu(H\cap\Omega)=0$．用P_∞表示可以构造成无穷序列的λ-窄小的正方体 $H\in T$的并，于是有 $\mu(P_\infty\cap\Omega)=0$.

令P_j表示T中具有下面性质的λ-窄小的正方体H的并；由H出发用上面的方法得到的某个序列终止于第j步(即H_j是λ-丰满的)．任何特定的λ-丰满的正方体H'只有当H包含于边长为$2j+1$，中心在H'中的正方体时，才能作为由H开始的序列的末尾H_j．因此，在P_j中正方体以H'为其序列的第j个元素H_j的个数最多是$(2j+1)^n$个，那么

$$\mu(P_j\cap\Omega)=\sum_{H\subset P_j}\mu(H\cap\Omega)$$
$$\leqslant(1/2^j)\sum_{H\subset P_j}\mu(H_j\cap\Omega)$$

$$\leqslant [(2j+1)^n/2^j] \sum_{H' \in P} \mu(H' \cap \Omega)$$
$$= [(2j+1)^n/2^j] \mu(P \cap \Omega),$$

因此$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j \cap \Omega) < \infty$. 由于 $\mathbf{R}^n = P \cup P_\infty \cup P_1 \cup P_2 \cdots$，我们有 $\mu(\Omega) < \infty$. ∎

假设 $1 \leqslant q < p$. 如果 $\operatorname{vol}\Omega < \infty$，那么由定理 2.8 可知嵌入

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega) \tag{39}$$

是存在的. 下面我们证明其逆命题.

6.38 定理 假设对某一对 p, q, $1 \leqslant q < p$, 嵌入(39)是存在的，则 Ω 有有限的体积.

证明 设 T, λ 与前面定理证明引入的 T, λ 意义一样. 这里仍然用 P 表 T 中 λ-丰满的正方体的并，如果我们能够证明 $\mu(P \cap \Omega)$ 是有限的，那么由前面定理证明中同样的推导可知 $\operatorname{vol}\Omega$ 是有限的.

于是我们假定$\mu(P \cap \Omega)$是无限的. 那么就存在序列$\{H_j\}_{j=1}^{\infty}$，H_j 是 T 中λ-丰满的正方体，而且$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(H_j \cap \Omega) = \infty$. 以 L 表示 T 中所有正方体的中心组成的点阵，我们可以将 L 分为 3^n 个子点阵$\{L_i\}_{i=1}^{3^n}$使每个子点阵中点的坐标在每个坐标方向上都以 3 为周期. 对于每个 i 用 T_i 表示 T 中中心在 L_i 中的正方体组成的集合. 因而必然存在某一个 i 使得 $\sum_{\lambda-\text{丰满的}, H \in T_i} \mu(H \cap \Omega) = \infty$. 因此我们可以假设序列$\{H_j\}$的每个元素 H_j 都在某个 T_i 中，因此 $N(H_j) \cap N(H_k)$是不重叠的.

取整数 j_1 使得

$$2 \leqslant \sum_{j=1}^{j_1} \mu(H_j \cap \Omega) < 4.$$

设 ϕ_j 就是在证明定理 6.33 中引进的 ϕ_j，令

$$\psi_1(x)=2^{-1/p}\sum_{j=1}^{j_1}\phi_j(x).$$

由于 ϕ_j 的支集是分离的，正方体 H_j 是 λ-丰满的，对于 $|\alpha|\leqslant m$ 我们有

$$\begin{aligned}\|D^\alpha\psi_1\|_{0,p,\Omega}^p&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j_1}\int_\Omega|D^\alpha\phi_j(x)|^p dx\\&\leqslant\frac{1}{2}M^p\sum_{j=1}^{j_1}\mu(N(H_j)\cap\Omega)\\&\leqslant\frac{1}{2}M^p(1+(1/\lambda))\sum_{j=1}^{j_1}\mu(H_j\cap\Omega)\\&<2M^p(1+(1/\lambda)).\end{aligned}$$

另一方面

$$\|\psi_1\|_{0,q,\Omega}^q\geqslant2^{-q/p}\sum_{j=1}^{j_1}\mu(H_j\cap\Omega)\geqslant2^{1-q/p}.$$

这样定义了 j_1, ψ_1 之后，我们可以进一步用归纳法引进 j_2, $j_3\cdots$和 ψ_2, ψ_3, …使得

$$2^k\leqslant\sum_{j=j_{k-1}}^{j_k}\mu(H_j\cap\Omega)<2^{k+1}$$

$$\psi_k=2^{-k/p}k^{-2/p}\sum_{j=j_{k-1}}^{j_k}\phi_j(x).$$

象上面一样对 $|\alpha|\leqslant m$ 我们有

$$\|D^\alpha\psi_k\|_{0,p,\Omega}^p<(2/k^2)M^p(1+(1/\lambda)),$$
$$\|\psi_k\|_{0,q,\Omega}^q\geqslant2^{k(1-q/p)}(1/k)^{2q/p}.$$

因此 $\psi=\sum_{k=1}^\infty\psi_k$ 是属于空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 的但是不属于空间 $L^q(\Omega)$，这与(39)矛盾．因此 $\mu(p\cap\Omega)<\infty$，这就是所要证的．█

6.39 如果对某个 $q\geqslant p$ 存在紧嵌入(38)，我们已经证明了 Ω 的体积是有限的．实际上正如我们下面要证明的，更重要的是：当

$R\to\infty$时 $\mu(\{x\in\Omega:|x|\geqslant R\})$必须以很快的速度趋于零.

如果Q是$\mathbf{R}^n$某田字形划分中一些正方体H的并，我们以明显的方式将邻域，边框的记号推广到Q:

$$N(Q)=\bigcup_{H\subset Q}N(H),\quad F(Q)=N(Q)\sim Q.$$

给定$\delta>0$, 令$\lambda=\delta/3^n(1+\delta)$. 如果$Q$中所有的正方体$H$是$\lambda$-窄小的则$Q$本身在下面意义下是$\delta$-窄小的

$$\mu(Q\cap\Omega)\leqslant\delta\mu(F(Q)\cap\Omega). \tag{40}$$

为了看清这一点，注意当H跑过包含Q的诸正方体时，$F(H)$最多把$N(Q)$覆盖3^n次. 因此

$$\mu(Q\cap\Omega)=\sum_{H\subset Q}\mu(H\cap\Omega)\leqslant\lambda\sum_{H\subset Q}\mu(F(H)\cap\Omega)$$

$$\leqslant 3^n\lambda\mu(N(Q)\cap\Omega)=3^n\lambda[\mu(Q\cap\Omega)+\mu(F(Q)\cap\Omega)]$$

由上式移项(因为$\mu(\Omega)<\infty$, 上式右端第一项可以移至左端)，并注意$3^n\lambda/(1-3^n\lambda)=\delta$可以得到(40)式.

若S是$\mathbf{R}^n$中任意一个可测集，以Q表示我们的田字形划分中所有与S内相交①的正方体H的并. 且我们定义$F(S)=F(Q)$. 如果S与田字形划分中有限个λ-丰满的正方体有一个正的距离，那么Q是由λ-窄小的正方体组成的，由(40)我们可得

$$\mu(S\cap\Omega)\leqslant\mu(Q\cap\Omega)\leqslant\delta\mu(F(S)\cap\Omega). \tag{41}$$

6.40 定理 假设对于某个$q\geqslant p$存在一个紧嵌入(38). 对任意$r\geqslant 0$, 令$\Omega_r=\{x\in\Omega:|x|>r\}$, $S_r=\{x\in\Omega:|x|=r\}$, 并且以A_r表示S_r($n-1$维测度)的面积则有

(a) 对于任给的$\varepsilon,\delta>0$存在一个R使得如果$r>R$则有

$$\mu(\Omega_r)\leqslant\delta\mu(\{x\in\Omega:r-\varepsilon\leqslant|x|\leqslant r\}).$$

(b) 若A_r是正的而且当r趋于无穷时总是非增的，则对任意

① 这里"内相交"是指H的内点与S相交——译者注.

的 $\varepsilon>0$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{A_{r+\varepsilon}}{A_r}=0.$$

证明 对于给定的 $\varepsilon>0$，以 T 表示由边长为 $\varepsilon/2\sqrt{n}$ 的正方体组成的 $\mathbf{R}^n$ 的一个田字形划分．则 T 中任意一个与 Ω_r 内相交的正方体一定包含在 $\Omega_{r-\varepsilon/2}$ 内并且

$$F(\Omega_r)\subset\{x\in\Omega:r-\varepsilon\leqslant|x|\leqslant r\}.$$

对于给定 $\delta>0$，令 $\lambda=\delta/3^n(1+\delta)$，$R$ 表示一个充分大的数使 T 中的所有有限个 λ-丰满的正方体都包含在中心在原点半径为 $R-\varepsilon/2$ 的球中．这样对任意的 $r\geqslant R$，T 中所有与 Ω_r 内相交的正方体都是 λ-窄小的，由(41)式就可以推出结论(*a*)．

为了证明结论(*b*)，取 R_0 使 A_r 在 (R_0,∞) 上为非增的．对于固定的 $\varepsilon',\delta>0$，令 $\varepsilon=\varepsilon'/2$．设 R 为(*a*)中的 R．如果 $r>\max(R_0+\varepsilon',R)$，则

$$\begin{aligned}A_{r+\varepsilon'}&\leqslant(1/\varepsilon)\int_{r+\varepsilon}^{r+2\varepsilon}A_s ds\leqslant(1/\varepsilon)\,\mu(\Omega_{r+\varepsilon})\\&\leqslant(\delta/\varepsilon)\,\mu\{x\in\Omega:r\leqslant|x|\leqslant r+\varepsilon\}\\&=(\delta/\varepsilon)\int_r^{r+\varepsilon}A_s ds\leqslant\delta A_r\end{aligned}$$

由于 ε' 和 δ 是任意的，由此可得结论(*b*)．▮

6.41 推论 若对某个 $q\geqslant p$ 存在一个紧嵌入(38)，则对任意的 k 有

$$\lim_{r\to\infty}e^{kr}\mu(\Omega_r)=0.$$

证明 固定 k，令 $\delta=e^{-(k+1)}$．那么由定理 6.40(*a*)的结论可知存在一个 R，使当 $r\geqslant R$ 时则有 $\mu(\Omega_{r+1})\leqslant\delta\mu(\Omega_r)$．因此如果 j 是一个正整数，$0\leqslant t<1$，则有

$$\begin{aligned}&e^{k(R+j+t)}\mu(\Omega_{R+j+t})\leqslant e^{k(R+j+1)}\mu(\Omega_{R+j})\\&\leqslant e^{k(R+1)}e^{kj}\delta^j\mu(\Omega_R)\end{aligned}$$

$$=e^{k(R+1)}\mu(\Omega_R)e^{-j}.$$

当 j 趋向无穷时最后一项是趋于零的. ▌

6.42 附注 (1) 用 $\mathbf{R}^n$ 中的任意一个范数 ρ 代替范数 $\rho(x)=|x|$, 定理 6.40(a)证明中的论证仍然是成立的, 如果用新的范数 ρ 定义 A_r, 并且

$$\mu(\{x\in\Omega:r\leqslant\rho(x)\leqslant r+\varepsilon\})=\int_r^{r+\varepsilon}A_s ds,$$

同样结论(b)也成立. 例如如果 $\rho(x)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$ 结论(a),(b)都是正确的.

(2)如果 A_r 有一个等价的,正的非增的控制函数,即存在一个正的非增函数 $f(r)$和一个常数 $M>0$, 使得对充分大的 r 满足

$$A_r\leqslant f(r)\leqslant MA_r,$$

则结论(b)仍然成立.

(3)定理 6.33 比定理 6.40 更明确,因为后面定理的结论是整体性的, 然而显然嵌入(38)的紧性依赖于Ω的局部性质. 下面通过两个例子来解释这个事实.

6.43 例 设 $f\in C^1([0,\infty))$是一个正的非增的函数,而且有有界的导数 f'. 我们考虑平面区域(图 6(a))

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:x>0,0<y<f(x)\}. \tag{42}$$

关于 $\mathbf{R}^2$ 上的上确界范数, 即 $\rho(x,y)=\max(|x|,|y|)$, 对充分大的 s 我们有 $A_s=f(s)$. 因而当而且仅当对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{s\to\infty}\frac{f(s+\varepsilon)}{f(s)}=0 \tag{43}$$

时Ω满足定理 6.40 结论(b)[因为 f 是单调的, 结论(a)同样满足]. 例如 $f(x)=\exp(-x^2)$是满足(43)的但 $f(x)=e^{-x}$ 是不满足(43)的. 我们将要(在 6.48 节)证明如果条件(43)满足则嵌入

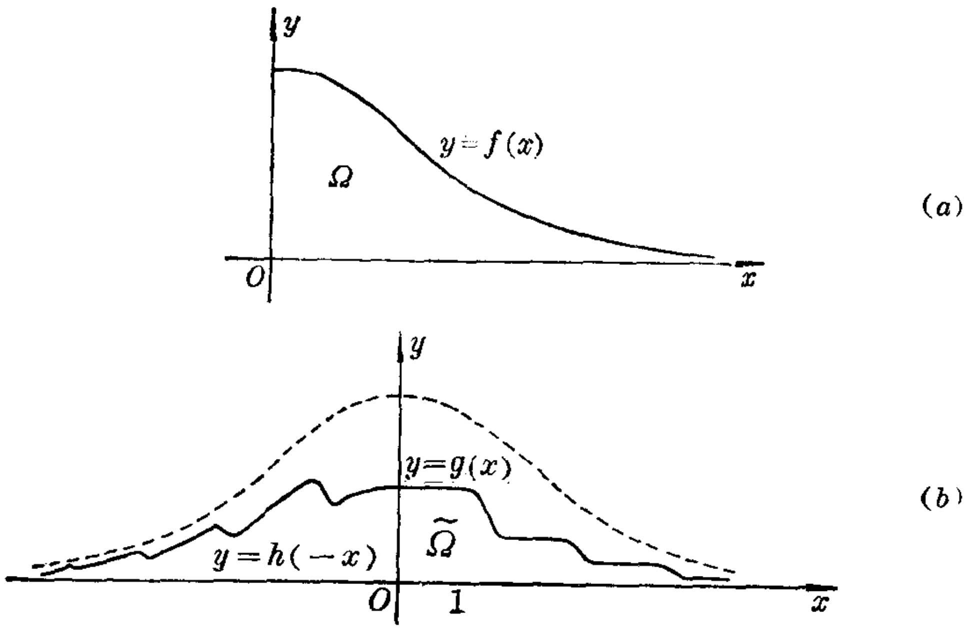


图 6 (*a*) 例 6.43 中的区域 Ω, (*b*) 例 6.44 中的区域 $\widetilde{\Omega}$

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^p(\Omega) \tag{44}$$

是紧的，因此对于(42)型的区域，(43)是嵌入(38)紧的充分必要条件.

6.44 例 设 f 满足例 6.43 中的条件，还满足 $f'(0)=0$ 又设 $g\in C^1([0,\infty))$是一个正的非增的函数并且满足

(i) $g(0)=\frac{1}{2}f(0)$, $g'(0)=0$,

(ii) 对所有的 $x\geqslant 0$, $g(x)<f(x)$,

(iii) $g(x)$在无穷多个相互不相交的单位长的区间上等于常数. 令 $h(x)=f(x)-g(x)$, 我们考虑区域(图 6(*b*))

$$\widetilde{\Omega}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\quad \text{当 } x\geqslant 0,\ 0<y<g(x),$$
$$\text{当 } x<0,\ 0<y<h(-x)\}.$$

对充分大的 s 我们仍有 $A_s=f(s)$, 所以如果(43)式成立，$\widetilde{\Omega}$就满足定理 6.40 的结论.

但是如果 T 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个田字形划分，T 中的正方形边长为

$\frac{1}{4}$，其边平行于坐标轴，而且T中有一个正方形的中心在原点，则T有无穷多个$\frac{1}{3}$-丰满的正方形，其中心在正的x轴上．由定理6.33，嵌入(44)不可能是紧的．

无界区域——$W^{m,p}(\Omega)$的紧嵌入

6.45 从上面例子可以看出对于无界区域Ω上嵌入

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^p(\Omega) \tag{45}$$

的紧性的任何充分条件必须包含：当r趋于无穷时Ω_r的每一部分的局部体积迅速的衰减，一个方便的办法是根据Ω上的流动来表示这样的局部衰减．

我们讲Ω上的一个*流动*意思就是有一个连续可微的映射Φ: $U\to\Omega$，其中U是$\Omega\times\mathbf{R}$中包含$\Omega\times\{0\}$的一个开集，并且对每个$x\in\Omega$有$\Phi(x,0)=x$.

对固定的$x\in\Omega$，曲线$t\to\Phi(x,t)$称为这个流动的一条*流线*，对于固定的t映射Φ_t: $x\to\Phi(x,t)$将Ω的子集映射到Ω，这个映射的函数行列式是

$$\det\Phi_t'(x)=\left.\frac{\partial(\Phi_1,\cdots,\Phi_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|_{(x,t)}.$$

有时要求流动Φ具有性质$\Phi_{s+t}=\Phi_s\circ\Phi_t$，但是我们不需要这个性质，所以没有作这个假定．

6.46 例 设Ω是由(42)式给出的区域，定义流动

$$\Phi(x,y,t)=(x-t,[f(x-t)/f(x)]y),\ 0<t<x.$$

这个流动是朝向线$x=0$的，且当区域变宽时流线散开（见图7）．对$t>0$，Φ_t是局部放大的：

$$\det\Phi_t'(x,y)=f(x-t)/f(x).$$

注意如果f满足(43)式则$\lim\limits_{x\to\infty}\det\Phi_t'(x,y)=\infty$.

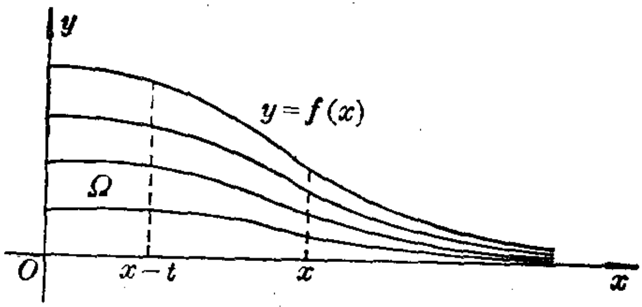


图 7　例 6.46 中给的流动 Φ 的流线

对 $N=1,2,\cdots$ 令 $\Omega_N^*=\{(x,y)\in\Omega:0<x<N\}$. Ω_N^*是有界的并且具有锥形性质，因此嵌入

$$W^{1,p}(\Omega_N^*)\to L^p(\Omega_N^*)$$

是紧的，根据下面的定理由这个紧性和流动 Φ 的性质就能够得到嵌入(45)的紧性.

6.47　定理　假设Ω是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集并且具有下面性质:

(*a*) 存在Ω的一个开的子集序列 $\{\Omega_N^*\}_{N=1}^{\infty}$，使 $\Omega_N^*\subset\Omega_{N+1}^*$，对每一个$N$嵌入

$$W^{1,p}(\Omega_N^*)\to L^p(\Omega_N^*)$$

是紧的.

(*b*)存在一个流动 $\Phi:U\to\Omega$，如果 $\Omega_N=\Omega\sim\Omega_N^*$ 则

(i) 对每个 N, $\Omega_N\times[0,1]\subset U$,

(ii) 对所有的 t, Φ_t 是一对一的,

(iii) 对所有$(x,t)\in U$, $|(\partial/\partial t)\Phi(x,t)|\leqslant M$(常数),

(*c*)函数 $d_N(t)=\sup\limits_{x\in\Omega_N}|\det\Phi_t'(x)|^{-1}$满足

(i) $\lim\limits_{N\to\infty}d_N(1)=0$,

(ii) $\lim\limits_{N\to\infty}\int_0^1 d_N(t)dt=0$.

则嵌入(45)是紧的.

证明　由于我们有嵌入 $W^{m,p}(\Omega)\to W^{1,p}(\Omega)\to L^p(\Omega)$，因而只要

证明后面的嵌入是紧的．设 $u\in C^1(\Omega)$ 对每个 $x\in\Omega_N$ 有

$$u(x)=u(\Phi_1(x))-\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}u(\Phi_t(x))dt$$

而且

$$\int_{\Omega_N}|u(\Phi_1(x))|dx\leqslant d_N(1)\int_{\Omega_N}|u(\Phi_1(x))||\det\Phi_1'(x)|dx$$

$$=d_N(1)\int_{\Phi_1(\Omega_N)}|u(y)|dy$$

$$\leqslant d_N(1)\int_\Omega|u(y)|dy.$$

还有 $$\int_{\Omega_N}\left|\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}u(\Phi_t(x))dt\right|dx$$

$$\leqslant\int_{\Omega_N}dx\int_0^1\left|\mathrm{grad}u(\Phi_t(x))\right|\left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(x)\right|dt$$

$$\leqslant M\int_0^1 d_N(t)dt\int_{\Omega_N}\left|\mathrm{grad}u(\Phi_t(x))\right|\left|\det\Phi_t'(x)\right|dx$$

$$\leqslant M\left\{\int_0^1 d_N(t)dt\right\}\left\{\int_\Omega\left|\mathrm{grad}u(y)\right|dy\right\}.$$

取 $\delta_N=\max(d_N(1),\ M\int_0^1 d_N(t)dt$, 我们有

$$\int_{\Omega_N}|u(x)|dx\leqslant\delta_N\int_\Omega(|u(y)|+|\mathrm{grad}u(y)|)dy$$

$$\leqslant\delta_N\|u\|_{1,1,\Omega}, \tag{46}$$

并且有 $\lim\limits_{N\to\infty}\delta_N=0$.

假设 u 是实的，而且 $u\in C^1(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)$．对 $|u|^p$ 的广义导数．

$$D_j(|u|^p)=p|u|^{p-1}\cdot\mathrm{sgn}u\cdot D_ju$$

的积分应用 Hölder 不等式得

$$\int_\Omega|D_j(|u(x)|^p)|dx\leqslant p\|D_ju\|_{0,p,\Omega}\|u\|_{0,p,\Omega}^{p-1}\leqslant p\|u\|_{1,p,\Omega}^p.$$

由于 $|u|^p \in W^{1,1}(\Omega)$，由定理 3.16 可知存在函数序列 $\phi_j \in C^1(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$，使得 $\lim_{j\to\infty} \|\phi_j - |u|^p\|_{1,1,\Omega} = 0$. 那么由 (46) 式得

$$\int_{\Omega_N} |u(x)|^p dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\Omega_N} \phi_j(x) dx \leqslant \lim_{j\to\infty} \sup \delta_N \|\phi_j\|_{1,1,\Omega}$$
$$= \delta_N \| |u|^p \|_{1,1,\Omega} \leqslant K\delta_N \|u\|^p_{1,p,\Omega}, \tag{47}$$

其中 $K = K(n, p)$. 对于任意的(复值的)函数 $u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ 分别对 u 的实部和虚部应用不等式(47)，可得不等式(47)对函数 u 也是成立的(常数 K 可能不同).

如果 S 是 $W^{1,p}(\Omega)$ 中的有界集，那么对任给 $\varepsilon > 0$ 由式(47)可以找到一个 N 使对所有 $u \in S$

$$\int_{\Omega_N} |u(x)|^p dx < \varepsilon.$$

由于嵌入 $W^{1,p}(\Omega \sim \Omega_N) \to L^p(\Omega \sim \Omega_N)$ 是紧的，由定理 2.22 可得 S 在 $L^p(\Omega)$ 中是准紧的，因此嵌入 $W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ 是紧的.

6.48 例 我们仍然考虑例 6.43, 6.46 讨论过的区域 Ω 和在例 6.46 中给出的流动 Φ. 当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时，我们有

$$d_N(t) = \sup_{x \geqslant N} \frac{f(x)}{f(x-t)} \leqslant 1,$$

由式(43)，当 $t > 0$

$$\lim_{N\to\infty} d_N(t) = 0.$$

由控制收敛定理我们有

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 d_N(t) dt = 0.$$

f' 是有界的这个假设保证了速度 $|(\partial/\partial t)\Phi(x, y, t)|$ 在 U 上是有界的. 因而区域 Ω 满足定理 6.47 的条件，对于这样的区域 Ω 嵌入 (45) 是紧的.

6.49 例 对于某些有界区域，定理 6.47 也能够用于证明嵌入

(45)的紧性,对这些有界区域既不能应用 Rellich-Kondrachov定理,也不能用这个定理证明的技巧. 例如我们考虑

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: 0<x<2,\ 0<y<f(x)\}.$$

其中 $f\in C^1(0,2)$ 是正的,非减的,有有界的导数 f',并且满足

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=0.$$

令 $U=\{(x,y,t)\in\mathbf{R}^3: (x,y)\in\Omega,\ -x<t<2-x\}$,

定义下面的流动

$$\Phi: U\to\Omega$$

$$\Phi(x,y,t)=\left(x+t,\ \frac{f(x+t)}{f(x)}y\right).$$

因此 $\det\Phi_t'(x,y)=f(x+t)/f(x)$. 如果 $\Omega_N^*=\{(x,y)\in\Omega,\ x>1/N\}$,则

$$d_N(t)=\sup_{0<x\leqslant 1/N}\left|\frac{f(x)}{f(x+t)}\right|$$

对 $0\leqslant t\leqslant 1$ 满足 $d_N(t)\leqslant 1$,如果 $t>0$, $\lim\limits_{N\to\infty}d_N(t)=0$. 由控制收敛定理也有 $\lim\limits_{N\to\infty}\int_0^1 d_N(t)=0$. 由于 Ω_N^* 是有界的而且具有锥性质,又由于 f' 的有界性保证了 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ 的有界性,因此由定理 6.47 我们可得嵌入

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^p(\Omega) \tag{48}$$

的紧性.

假设对任意的 k, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)/x^k=0$. [例如,令 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.]那么区域 Ω 在原点就有一个指数的尖点,由定理 5.32 我们知道对任意的 $q>p$ 嵌入

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$$

是不存在的. 因此不能用 6.7 节的方法证明嵌入(48) 的紧性.

6.50 附注 (1) 容易设想比上面的例子更一般的区域，定理 6.47 也是能够应用的，虽然选取一个适当的流动可能是困难的. 一个有很多(可能是无穷多)个无界的分支的连通区域也能够用一个适当的流动来描述，只要每一分支是正则的，且其体积相当快的衰减. 从例 6.44 中给出的区域 $\widetilde{\Omega}$ 可以看出一个条件是不够的. 对于每部分体积都是单调衰减的无界区域，定理 6.40 实质上是定理 6.47 的逆定理，定理 6.40 的证明可以分别地应用于证明每个分支的体积以所要求的方式衰减.

(2) 由于对于无界区域 Ω 为了使 $W^{m,p}(\Omega)$ 紧嵌入 $L^p(\Omega)$，必须有有限的体积，定理 6.47 不能推广到使 $W^{m,p}(\Omega)$ 紧嵌入 $L^q(\Omega)$ $(q>p)$, $C_B(\Omega)$，等等. ——这些嵌入是不存在的.

Hilbert-Schmidt 嵌入

6.51 在可分的 Hilbert 空间 X 中一个完全的标准正交系是一个满足下面条件的元素序列 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$(e_i,\ e_j)_X=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

[这里 $(\cdot,\cdot)_X$ 是空间 X 的内积]，而且对每个 $x\in X$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x-\sum_{i=1}^{k}(x,e_i)_X e_i;X\right\|=0. \tag{49}$$

因此 $x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)_X e_i$，这个级数对于 X 中的范数是收敛的. 我们知道每一个可分的 Hilbert 空间都具有这样的完全正交系. 从 (49)式可以推出 Parseval 等式

$$\|x;\ X\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(x,\ e_i)_X|^2.$$

假设X和Y是两个可分的 Hilbert 空间，$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$分别是它们的完全标准正交系，又假设A是一个由X到Y的线性算子．令A^*是A的伴随算子A^*把Y映射到X，其定义如下：

$$(x, A^*y)_X = (Ax, y)_Y,\ x\in X,\ y\in Y$$

定义

$$|||A|||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|Ae_i; Y\|^2,\ |||A^*|||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|A^*f_i; X\|^2.$$

如果$|||A|||$是有限的，则称A为 Hilbert-Schmidt 算子，称$|||A|||$为算子的 Hilbert-Schmidt 范数（回忆一下，算子A的范数由

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax; Y\|}{\|x; X\|}$$

给出．）我们必须验证上面定义的合理性．

6.52 引理 范数$|||A|||$和$|||A^*|||$不依赖于正交系$\{e_i\}$，$\{f_i\}$的选取，而且

$$|||A||| = |||A^*||| \geqslant \|A\|.$$

证明 由 Parseval 等式

$$|||A|||^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\|Ae_i; Y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|(Ae_i, f_j)_Y|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|(e_i, A^*f_j)_X|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\|A^*f_j; X\|^2 = |||A^*|||.$$

因此$|||A|||$，$|||A^*|||$是不依赖于$\{e_i\}$；$\{f_i\}$的．对于任意的$x\in X$，我们有

$$\|Ax; Y\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)_X Ae_i; Y\right\|^2$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|(x, e_i)_X|\,\|Ae_i; Y\|\right)^2$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|(x, e_i)_X|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Ae_j, Y\|^2\right) = \|x; X\|^2 |||A|||^2.$$

所以$\|A\|\leqslant|||A|||$，这就是所要求的．▌

我们留给读者自己去证明下面的结论:

(a) 设 X, Y, Z 是可分的 Hilbert 空间,A,B 分别是从 X 到 Y, Y 到 Z 的有界线性算子,如果 A,B 中有一个是 Hilbert-Schmidt 算子则 $B\circ A$ 是 X 到 Z 的 Hilbert-Schmidt 算子.(如 A 是 Hilbert-Schmidt 算子, 则 $\|B\circ A\|\leqslant\|B\|\,\|A\|$.)

(b) 每一个 Hilbert-Schmidt 算子是紧的.

下面的定理是属于 Maurin[43] 的, 这个定理对于微分算子的特征函数展开是寓义深远的.

6.53 定理 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有锥性质的有界集, m, k 是非负的整数 $k>n/2$. 则嵌入映射

$$W^{m+k,2}(\Omega)\to W^{m,2}(\Omega) \tag{50}$$

是 Hilbert-Schmidt 算子. 类似地对任意有界区域 Ω 嵌入

$$W_0{}^{m+k,2}\to W_0{}^{m,2}(\Omega) \tag{51}$$

也是 Hilbert-Schmidt 算子.

证明 对于给定的 $y\in\Omega,\alpha(|\alpha|\leqslant m)$, 在 $W^{m+k,2}(\Omega)$ 上定义如下的线性泛函 T_y^α

$$T_y^\alpha(u)=D^\alpha u(y).$$

由于 $k>n/2$, 由 Sobolev 嵌入定理 5.4 可知 T_y^α 在 $W^{m+k,2}(\Omega)$ 上是有界的, 存在一个不依赖于 α, y 的常数 K 使:

$$|T_y^\alpha(u)|\leqslant\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha u(x)|\leqslant K\|u\|_{m+k,2,\Omega}. \tag{52}$$

由 Hilbert 空中间的 Riesz 表示定理, 存在一个 $v_y^\alpha\in W^{m+k,2}(\Omega)$ 使

$$D^\alpha u(y)=T_y^\alpha(u)=(u,v_y^\alpha)_{m+k}, \tag{53}$$

其中 $(\cdot,\cdot)_{m+k}$ 是空间 $W^{m+k,2}(\Omega)$ 中的内积, 而且

$$\|v_y^\alpha\|_{m+k,2,\Omega}=\|T_y^\alpha;[W^{m+k,2}(\Omega)]'\|\leqslant K. \tag{54}$$

如果 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ 是空间 $W^{m+k,2}(\Omega)$ 中一完全标准正交系, 则

$$\|v_y^\alpha\|^2_{m+k,2,\Omega}=\sum_{i=1}^{\infty}|(e_i,v_y^\alpha)_{m+k}|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|D^\alpha e_i(y)|^2.$$

因此,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|e_i\|^2_{m,2,\Omega}\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega\|v_y^\alpha\|^2_{m+k,2,\Omega}dy.$$

$$\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant m}K\operatorname{vol}\Omega<\infty \tag{55}$$

因此嵌入(50)是 Hilbert-Schmidt 算子. 对嵌入(51)的证明是完全相同的,只是不用定理 5.4 对区域Ω正则性的要求.

下面的 Maurin 定理的推广是属于 Clark 的[17].

6.54 定理 设μ是定义于区域 $\Omega\in\mathbf{R}$ 上一个非负可测函数. 又设 $W_0^{m,2;\mu}(\Omega)$ 是由空间 $C_0^\infty(\Omega)$ 按照下面带权的范数完备化得到的 Hilbert 空间

$$\|u\|_{m,2;\mu}=\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|D^\alpha u(x)|^2\mu(x)dx\right\}^{1/2}.$$

对于 $y\in\Omega$, 令 $\tau(y)=\operatorname{dist}(y,\operatorname{bdry}\Omega)$. 设$\nu$是一个非负的整数使

$$\int_\Omega[\tau(y)]^{2\nu}\mu(y)dy<\infty. \tag{56}$$

如果 $k>\nu+n/2$, 那么嵌入

$$W_0^{m+k,2}(\Omega)\to W_0^{m,2,\mu}(\Omega) \tag{57}$$

(存在并且)是 Hilbert-Schmidt 算子.

证明 设$\{e_i\}$, T_y^α, v_y^α 如前一定理中定义的那样. 如果 $y\in\Omega$, 在 $\operatorname{bdry}\Omega$ 上选取一点 y_0 使 $\tau(y)=|y-y_0|$. 如果ν是一个正整数,而且$u\in C_0^\infty(\Omega)$,利用带有余项的Taylor公式我们对于满足$|y-y_\beta|\leqslant\tau(y)$的某点 y_β 有

$$D^\alpha u(y)=\sum_{|\beta|=\nu}(1/\beta!)D^{\alpha+\beta}u(y_\beta)(y-y_\beta)^\beta.$$

如果$|\alpha|\leqslant m$ 并且 $k>\nu+n/2$ 我们由 Sobolev 嵌入定理[像在(52)

中一样]可以得到

$$|D^\alpha u(y)|\leqslant K\|u\|_{m+k,2}[\tau(y)]^\nu. \tag{58}$$

由于完备性对任何 $u\in W_0{}^{m+k,2}(\Omega)$ 不等式(58)也是成立的，如果 $\nu=0$，直接从(52)可知不等式(58)也成立. 因此由(53)和(54)可得

$$\|v_y^\alpha\|_{m+k,2}=\sup_{\|u\|_{m+k,2}=1}|D^\alpha u(y)|\leqslant K[\tau(y)]^\nu.$$

最后由(56)式得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|e_i\|^2{}_{m,2;\mu}\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega\|v_y^\alpha\|_{m+k,2}^2\mu(y)dy$$

$$\leqslant K^2\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega[\tau(y)]^{2\nu}\mu(y)dy<\infty.$$

因此嵌入(57)是 Hilbert-Schmidt 算子. ▌

6.55附注 选取各种不同的 μ,ν，导至形为(51)式的 Maurin定理的各种推广. 如果 $\mu(x)\equiv1$ 且 $\nu=0$，我们得到对于体积有限的无界区域上显然的推广. 如果 $\mu(x)\equiv1$，$\nu>0$，Ω 可以是无界区域甚至可以有无限体积，但是由(56)式它必是拟有界的[当然拟有界性不足以保证(56)式成立]. 如果 μ 是 Ω 的一个有界子区域 Ω_0 的特征函数，并且 $\nu=0$，我们得到 Hilbert-Schmidt 嵌入

$$W_0{}^{m+k,2}(\Omega)\to W^{m,2}(\Omega_0),\quad k>n/2.$$

第七章　分数次空间

概　　要

7.1　本章我们推广 Sobolev 空间的概念到允许非整数 m. 为作到这一点，存在不止一种方法. 不同的途径可引导到相同或不同的空间族. 主要的空间族如下:

(i)　空间 $W^{s,p}(\Omega)$——它可由"实内插"法定义，亦可通过包含高阶导数的一阶差分的固有范数表征.

(ii)　空间 $L^{s,p}(\Omega)$——它可由"复内插"法定义，但是在 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 时亦可通过 Fourier 变换表征.

(iii)　Besov 空间 $B^{s,p}(\Omega)$——通过类似 $W^{s,p}(\Omega)$ 的固有范数定义，但包含二阶差分而非一阶差分.

(iv)　Nikols'kii 空间 $H^{s,p}(\Omega)$——赋予包含 L^p 度量的 Hölder 条件的范数.

仅仅空间 $W^{s,p}(\Omega)$ 和 $L^{s,p}(\Omega)$ 当 $s=m$（整数）时和 $W^{s,m}(\Omega)$ 重合. $B^{s,p}(\Omega)$ 和 $W^{s,p}(\Omega)$ 当 $p=2$ 时对所有的 s 重合，但当 $p\neq 2$ 时仅对非整数 s 重合. 空间 $H^{s,p}(\Omega)$ 总是大于（但接近于）$W^{s,p}(\Omega)$，从嵌入的观点看最简单最完全的结果是对空间 $B^{s,p}(\Omega)$ 和 $H^{s,p}(\Omega)$ 的情形获得的（见定理 7.70 和 7.73 节）. 但是，正是借助于空间 $W^{s,p}(\Omega)$，在 5.20 节提出的表征 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的函数在一光滑流形上迹的问题有解答（定理 7.53）. 基于这一理由，本章我们集中力量阐明空间 $W^{s,p}(\Omega)$ 的性质，而对其它空间族的类似性质仅给以简短的描述.

本章大约一半篇幅按 Lions 的"迹内插法"展开，在此基础上

我们研究空间 $W^{s,p}(\Omega)$. 这些空间在7.36引进. 迹内插法是本质上等价的几个 Banach 空间实内插法中的一个, 对此现已有可观的文献. 这些方法的描述可在 Butzer 和 Berens [13] Stein 和 Weiss[65] 的著作中找到, 有兴趣的读者可以参考 Peetre[56] 和 Grisvard[28]的关于内插在分数次 Sobolev 空间这一方面的应用的著作. 在 Stein[64a]中亦给出这些空间的论述. 本章大部份材料循沿 Lions[37], [38]和 Lions 与 Magenes[40].

Bochner 积分

7.2 本章我们将经常使用定义在 R 中一个区间上取值在Banach 空间的函数 f 的积分的概念. 因此我们从 Bochner 积分的一个简短的讨论开始, 有关我们的断言的细节及其证明, 读者可查阅例如 Yosida 的书[69].

设 B 是一个带范数 $\|\cdot\|_B$ 的 Banach 空间. 设 $\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中一族有限个互不相交的可测子集, 每一子集有有穷测度, 设 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 是 B 中一族对应点, 由

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m}\chi_{A_j}(t)b_j$$

定义的 $\mathbf{R}$ 到 B 的函数称为简单函数, 其中 χ_A 是 A 的特征函数. 对简单函数, 我们显然定义

$$\int_{\mathbf{R}}f(t)dt=\sum_{j=1}^{m}\mu(A_j)b_j,$$

其中 $\mu(A)$ 表示 A 的(Lebesgue)测度.

令 A 是 $\mathbf{R}$ 中可测集, f 是 A 到 B 几乎处处定义的任意函数. 函数 f 称为在 A(强)可测的, 若存在一个支集在 A 中的简单函数序列 $\{f_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(t)-f(t)\|_B=0 \qquad \text{a. e. 于 } A. \tag{1}$$

令$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$B$和它的对偶空间$B'$之间的元素偶(即$b'(b)=\langle b, b\rangle'$, $b\in B$, $b'\in B'$). 可以证明任何值域可分的函数是可测的, 只要对每一$b'\in B'$数值函数$\langle f(\cdot), b'\rangle$在$A$上可测.

假如满足(1)的简单函数列f_n可选得满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \|f_n(t)-f(t)\|_B dt=0.$$

则称f在A上(Bochner)可积, 并且定义

$$\int_A f(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} f_n(t)dt. \tag{2}$$

[(2)右端的积分在B中按范数拓扑收敛到一个极限, 它不依赖于逼近序列f_n的选择.]

当且仅当$\|f(\cdot)\|_B$在A上(Lebesgue)可积时, 可测函数f在A上是可积的. 事实上

$$\left\|\int_A f(t)dt\right\|_B\leqslant\int_A\|f(t)\|_B dt.$$

7.3 设$-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$. 我们用$L^p(a, b; B)$表示$(a, b)$到$B$的满足$\|f(\cdot)\|_B\in L^p(a, b)$的可测函数$f$的(等价类的)空间. 空间$L^p(a, b; B)$赋以下述范数是Banach空间:

$$\|f; L^p(a, b; B)\|=\begin{cases}\left\{\int_a^b\|f(t)\|_B^p dt\right\}^{1/p}, & 当\ 1\leqslant p<\infty\\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(a,b)}\|f(t)\|_B & 当\ p=\infty.\end{cases}$$

类似的, 若$f\in L^p(c, d; B)$对任何满足$a<c<d<b$的c, d均成立, 就记$f\in L^p_{\mathrm{loc}}(a, b; B)$, 当$p=1$时称$f$局部可积.

一个局部可积函数g称为局部可积函数f的j次广义导数, 只要对任意数值检验函数$\phi\in\mathscr{D}(a, b)=C_0^\infty(a, b)$有

$$\int_a^b\phi^{(j)}(t)f(t)dt=(-1)^j\int_a^b\phi(t)g(t)dt.$$

算子半群和抽象 Cauchy 问题

7.4 以下几节讨论 Banach 空间中算子半群理论的若干方面，这些在后面"迹空间"和分数次空间 $W^{s,p}(\Omega)$ 的研究中需要. 我们根据Zaidman 的著作[70]进行论述.

7.5 设 B 是一个 Banach 空间，$L(B)$ 是定义域为 B，值域在 B 中的有界线性算子的 Banach 空间，并分别用 $\|\cdot\|_B$ 和 $\|\cdot\|_{L(B)}$ 表示 B 和 $L(B)$ 中的范数.

定义域为 $[0,\infty)$，值域在 $L(B)$ 中的函数 G 称为 B 上(强)连续半群，只要

(i) $G(0)=I$，I 是 B 上等同算子，

(ii) 对任意 $s,t\geqslant 0$，$G(s)G(t)=G(s+t)$，

(iii) 对每一 $b\in B$，函数 $G(\cdot)b$ 从 $[0,\infty)$ 到 B(按范数拓扑)连续.

我们注意(ii)意味算子 $G(s)$ 和 $G(t)$ 可交换. 又(iii)意味对每一 $t_0\geqslant 0$，集 $\{t:\|G(t)\|_{L(B)}>t_0\}$ 在 $\mathbf{R}$ 中是开集，从而可测. 若 $0\leqslant t_0<t_1<\infty$，则对每一 $b\in B$，$G(\cdot)b$ 在 $[t_0,t_1]$ 一致连续，因此存在常数 K_b 满足 $\|G(t)b\|_B\leqslant K_b$，$t_0\leqslant t\leqslant t_1$. 由泛函分析的一致有界性原理，存在常数 K 使对所有 $b\in B$ 及所有 $t\in[t_0,t_1]$，$\|G(t)\|_{L(B)}\leqslant K$. 于是 $\|G(\cdot)\|_{L(B)}\in L^\infty_{\rm loc}(0,\infty)$，我们引伸这一结果成下列引理.

7.6 引理 (*a*) 极限

$$\lim_{t\to\infty}(1/t)\log\|G(t)\|_{L(B)}=\delta_0$$

存在且有穷.

(*b*) 对每一 $\delta>\delta_0$，存在常数 M_δ，使当 $t\geqslant 0$ 有

$$\|G(t)\|_{L(B)}\leqslant M_\delta e^{\delta t}.$$

证明 令 $N(t)=\log\|G(t)\|_{L(B)}$，由于

$$\|G(s+t)\|_{L(B)}\leqslant\|G(s)\|_{L(B)}\|G(t)\|_{L(B)},$$

我们得N的次可加性

$$N(s+t)\leqslant N(s)+N(t).$$

令 $\delta_0=\inf\limits_{t>0}N(t)/t$. 显然 $0\leqslant\delta_0<\infty$. 给定 $\varepsilon>0$，选 $r>0$ 使 $N(r)/r<\delta_0+\varepsilon$，若 $t\geqslant 2r$，取 k 是满足$(k+1)r\leqslant t<(k+2)r$ 的整数，则

$$\delta_0\leqslant\frac{N(t)}{t}\leqslant\frac{N(kr)+N(t-kr)}{t}\leqslant\frac{k}{t}N(r)+\frac{1}{t}N(t-kr).$$

现有 $t-kr\in[r,2r)$，前面业已指出 $N(t-kr)$有界，设界为 K. 这样就有

$$\delta_0\leqslant\frac{N(t)}{t}\leqslant\frac{kr}{t}(\delta_0+\varepsilon)+\frac{K}{t}\leqslant\left(1-\frac{r}{t}\right)(\delta_0+\varepsilon)+\frac{K}{t}.$$

右端当 $t\to\infty$ 时趋于 $\delta_0+\varepsilon$，而 $\varepsilon>0$ 任意，这就推出(a).

若 $\delta>\delta_0$，存在 t_δ，当 $t\geqslant t_\delta$ 时有 $N(t)\leqslant\delta t$，或等价地有 $\|G(t)\|_{L(B)}\leqslant e^{\delta t}$. 现在为推出结论$(b)$，只需令

$$M_\delta=\max(1,\sup_{0\leqslant t\leqslant t_\delta}\|G(t)\|_{L(B)}).\ \blacksquare$$

7.7 对给定的 $b\in B$，商$(G(t)b-b)/t$当$t\to0+$时在B中可能(强)收敛亦可能不(强)收敛. 令$D(A)$是所有这样的极限存在的元素的集，对 $b\in D(A)$令

$$Ab=\lim_{t\to0+}\frac{G(t)b-b}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{G(t)b-G(0)b}{t}.$$

显然$D(A)$是B的一个线性子空间，而 A 是一个从$D(A)$到B内的线性算子. 称 A 为半群G的无穷小生成子. 注意 A 与$G(t)$在$D(A)$上可交换.

7.8 引理 (a)对每一$b\in B$

$$\lim_{t\to0+}(1/t)\int_0^t G(\tau)bd\tau=b.$$

(b) 对每一$b\in B$和$t>0$我们有

$$\int_0^t G(\tau)bd\tau\in D(A)\text{且}A\int_0^t G(\tau)bd\tau=G(t)b-b.$$

(c) 对每一$b\in D(A)$和$t>0$我们有

$$\int_0^t G(\tau)Abd\tau=G(t)b-b.$$

(d) $D(A)$在B中稠密.

(e) A是B中闭算子，即B的图象$\{(b, Ab):b\in D(A)\}$是$B\times B$中一个闭子空间.

证明 令$b\in B$. 由$G(\cdot)b$的连续性我们有

$$\lim_{\tau\to 0+}\|G(\tau)b-b\|_B=\lim_{\tau\to 0+}\|G(\tau)b-G(0)b\|_B=0.$$

只要注意到 $b=\frac{1}{t}\int_0^t bd\tau$ 就可得结论(a).

对固定的t我们有

$$\lim_{s\to 0+}\frac{G(s)-G(0)}{s}\int_0^t G(\tau)\,bd\tau$$

$$=\lim_{s\to 0+}\frac{1}{s}\int_0^t[G(s+\tau)-G(\tau)]bd\tau$$

$$=\lim_{s\to 0+}\left(\frac{1}{s}\int_s^{s+t}G(\tau)bd\tau-\frac{1}{s}\int_0^t G(\tau)bd\tau\right)$$

$$=\lim_{s\to 0+}\left(\frac{1}{s}\int_t^{s+t}G(\tau)bd\tau-\frac{1}{s}\int_0^s G(\tau)bd\tau\right)$$

$$=\lim_{s\to 0+}\frac{1}{s}\int_0^s G(\tau)G(t)bd\tau-b=G(t)b-b.$$

这就证明了(b). 若$b\in D(A)$, 则当$s\to 0+$

$$\left\|\int_0^t G(\tau)\left(\frac{G(s)b-b}{s}-Ab\right)d\tau\right\|_B$$

$$\leqslant t\sup_{0<\tau<t}\|G(\tau)\|_{L(B)}\left\|\frac{G(s)b-b}{s}-Ab\right\|_B\to 0,$$

于是

$$A\int_0^t G(\tau)b d\tau = \lim_{s\to 0+}\int_0^t G(\tau)\frac{G(s)b-b}{s}d\tau=\int_0^t G(\tau)Ab d\tau,$$

这就证明了(c). (d)是(a)和(b)的直接推论.

设$b_n\in D(A)$, $b_n\to b$且在B中, $Ab_n\to b_0$, 则由(c)

$$G(t)b_n-b_n=\int_0^t G(\tau)Ab_n d\tau,$$

我们令$n\to\infty$, 并可象在(c)中那样验证交换极限和积分的次序的合理性, 从而得

$$G(t)b-b=\int_0^t G(\tau)b_0 d\tau,$$

于是由(a)

$$\lim_{t\to 0+}\frac{G(t)b-b}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_0^t G(\tau)b_0 d\tau=b_0,$$

因此$b\in D(A)$并且$Ab=b_0$, 这就证明了(e). ∎

7.9 注 由A的闭性可知$D(A)$赋予范数$\|b;D(A)\|=\|b\|_B+\|Ab\|_B$构成Banach空间. 这样就有显然的嵌入$D(A)\to B$.

下面的定理论及对一阶微分算子的典型Cauchy初值问题的抽象提法.

7.10 定理 设A是Banach空间B上连续半群G的无穷小生成子. 令$a\in D(A)$, f是$[0, \infty)$到B内的连续可微函数. 则存在唯一的$[0,\infty)$到$D(A)$的连续函数u, 它有$(0,\infty)$到B内的连续导数u', 满足

$$u'(t)-Au(t)=f(t),\ t\geqslant 0 \qquad (3)$$
$$u(0)=a$$

并且u由

$$u(t)=G(t)a+\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau \qquad (4)$$

给出.

证明 (唯一性) 我们必须指出当$f(t)\equiv 0$, $a=0$时(3)仅有的解

是 $u(t)\equiv 0$. 若 u 是任一解而 $t>\tau$, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial\tau}G(t-\tau)\,u(\tau)=\lim_{s\to 0}\frac{G(t-\tau-s)u(\tau+s)-G(t-\tau)u(\tau)}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{G(t-\tau-s)-G(t-\tau)}{s}u(\tau)$$

$$+\lim_{s\to 0}G(t-\tau-s)\frac{u(\tau+s)-u(\tau)}{s}$$

$$=-G(t-\tau)\Lambda u(\tau)+G(t-\tau)u'(\tau)=0.$$

于是 $G(t-\tau)u(\tau)=G(t)u(0)=0,\ t>\tau$. 令 $t\to\tau+$, 我们得 $u(\tau)=G(0)u(\tau)=0$ 对所有 $\tau\geqslant 0$ 成立.

(存在性) 我们验证由(4)给定的 u 满足(3). 首先注意 $u(0)=a$ 且 $(d/dt)G(t)a=\Lambda G(t)a$. 因此只需证明函数

$$g(t)=\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

从$[0,\ \infty)$到 B 内连续可微, 在 $D(\Lambda)$ 取值且满足 $g'(t)=\Lambda g(t)+f(t)$.

今有

$$\frac{g(t+s)-g(t)}{s}$$

$$=\frac{1}{s}\int_0^{t+s}G(t+s-\tau)f(\tau)d\tau-\frac{1}{s}\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{s}\int_{-s}^{t}G(t-\tau)f(\tau+s)d\tau-\frac{1}{s}\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t G(t-\tau)\frac{f(\tau+s)-f(\tau)}{s}d\tau+\frac{1}{s}\int_t^{t+s}G(\tau)f(t+s-\tau)d\tau.$$

因 f 从$[0,\infty)$到 B 内连续可微, 故

$$g'(t)=\int_0^t G(t-\tau)f'(\tau)d\tau+G(t)f(0)$$

存在且从$[0,\infty)$到 B 内连续, 另一方面,

$$\frac{g(t+s)-g(t)}{s}=\int_0^t \frac{G(s)-G(0)}{s} G(t-\tau)f(\tau)d\tau$$
$$+\frac{1}{s}\int_t^{t+s} G(t+s-\tau)f(\tau)d\tau$$
$$=\frac{G(s)-G(0)}{s}g(t)+\frac{1}{s}\int_0^s G(s-\tau)f(t+\tau)d\tau.$$

由引理 7.8(a)和f的连续性,后一积分当 $s\to 0+$ 时收敛到$f(t)$,再加上$g'(t)$的存在性,这就保证

$$\lim_{s\to 0+}[G(s)-G(0)]g(t)/s \text{ 存在, 即} g(t)\in D(A),$$

并且 $g'(t)=Ag(t)+f(t)$,这正是所要证明的. ▌

Lions 的迹空间

7.11 设B_1和B_2是分别带有范数$\|\cdot\|_{B_1}$和$\|\cdot\|_{B_2}$的两个 Banach 空间,X是一个拓扑向量空间,B_1和B_2连续嵌入其中(即对X中任一开集U, $B_i\cap U$在B_i中是开集,$i=1, 2$). B_1和B_2的向量和

$$B_1+B_2=\{b_1+b_2\in X: b_1\in B_1, b_2\in B_2\}$$

赋以范数

$$\|u; B_1+B_2\|=\inf_{\substack{b_i\in B_i\\ b_1+b_2=u}}(\|b_1\|_{B_1}+\|b_2\|_{B_2})$$

是 Banach 空间.

令$1\leqslant p\leqslant\infty$,对每一实数$\nu$,令$t^\nu$表示定义在$[0, \infty)$的实值函数$t^\nu(t)=t^\nu$, $0\leqslant t<\infty$.

用$W(p, \nu; B_1, B_2)$(当不致引起混淆时用W)表示从$[0, \infty)$到B_1+B_2内的满足条件.

$$t^\nu f\in L^p(0, \infty; B_1) \text{且} t^\nu f'\in L^p(0, \infty; B_2)$$

的可测函数f(的等价类)的空间. f'表示f的广义导数.空间W赋以范数

$$\|f\|_W=\|f; W(p, \nu; B_1, B_2)\|$$

$$=\max(\|t^{\nu}f;\ L^{p}(0,\ \infty;B_1)\|,\|t^{\nu}f';L^{p}(0,\infty;B_2)\|)$$

是 Banach 空间.

作为这种结构的一个例子，读者可以验证 $W(p,0;W^{1,p}(\mathbf{R}^n),L^p(\mathbf{R}^n))$同构于Sobolev 空间 $W^{1,p}(\Omega)$，其中 $\Omega=\{(x,t)=(x_1,\cdots,x_n,t)\in\mathbf{R}^{n+1}:t>0\}$.

我们将证明对某些 p 和 ν 的值，W 中的函数 f 在 B_1+B_2 中具有迹 $f(0)$.

7.12 引理 设 $f\in W$，则存在 $b\in B_1+B_2$ 在$(0,\infty)$a.e. 满足

$$f(t)=b+\int_1^t f'(\tau)d\tau. \tag{5}$$

因此 f 几乎处处等于一个从$(0,\infty)$到 B_1+B_2 内的连续函数.

证明 由于 $t^{\nu}f\in L^p(0,\infty;B_1)$，因此 $f\in L^p{}_{\mathrm{loc}}(0,\ \infty;B_1)$，同理 $f'\in L^p{}_{\mathrm{loc}}(0,\infty;B_2)$，由

$$v(t)=f(t)-\int_1^t f'(\tau)d\tau$$

几乎处处定义在$(0,\ \infty)$到 B_1+B_2 内的函数 v 属于 $L^p{}_{\mathrm{loc}}(0,\infty;B_1+B_2)$，于是对任意 $b'\in(B_1+B_2)'$，数值函数 $\langle v(\cdot),b'\rangle$属于 $L^p{}_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$. 对每一 $\phi\in C_0^\infty(0,\infty)$，我们有

$$\int_0^\infty\frac{d}{dt}\langle v(t),b'\rangle\phi(t)\,dt=-\int_0^\infty\langle v(t),b'\rangle\phi'(t)dt$$

$$=-\langle\int_0^\infty v(t)\phi'(t)dt,b'\rangle$$

$$=-\langle\int_0^\infty f(t)\,\phi'(t)dt-\int_0^\infty\phi'(t)dt\int_1^t f'(\tau)d\tau,b'\rangle$$

$$=\langle\int_0^\infty f'(t)\phi(t)dt-\int_0^\infty f'(t)\phi(t)dt,b'\rangle=0.$$

(积分和元素偶$\langle\cdot,\cdot\rangle$次序的交换是合理的，因为 v 在 ϕ 的支集上

可积，可用简单函数逼近，而对简单函数，上述次序交换显然可以.）由推论 3.27，对每一$b'\in(B_1+B_2)'$，$\langle v(t),b'\rangle$ 在$(0,\ \infty)$ a.e.是一常数，于是 $v(t)=b$，a.e. 于$(0,\infty)$，b 是B_1+B_2 中一固定向量，(5)立刻由此推出. 显然(5)中的积分从$(0,\infty)$到 B_2 内连续，从而到 B_1+B_2 内连续. ▮

7.13 引理 假设$(1/p)+\nu<1$，则(5)式右端当 $t\to0+$ 时在 B_1+B_2 中收敛. 其极限就定义为f 在 $t=0$ 的迹 $f(0)$.

证明 设 $0<s<t$，对 $1<p<\infty$ 我们有

$$\left\|\int_s^t f'(\tau)d\tau\right\|_{B_2}\leqslant\int_s^t\left\|\tau^\nu f'(\tau)\right\|_{B_2}\tau^{-\nu}d\tau$$

$$\leqslant\left\|t^\nu f';L^p(0,\infty;B_2)\right\|\left(\int_0^t\tau^{-\nu p/(p-1)}\,d\tau\right)^{(p-1)/p}.$$

后一因子由于$(1/p)+\nu<1$ 当$t\to0+$时趋于 0.（当 $p=1$ 或 $p=\infty$ 时推理作相应修改.）于是 $\int_1^t f'(\tau)d\tau$ 当 $t\to0+$ 时在 B_2 中收敛，这就证明了引理. ▮

7.14 给定实数 p 和 ν，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$\theta=(1/p)+\nu<1$，我们用 $T(p,\nu;B_1,B_2)$（或简单地用 T）表示 $W=W(p,\nu;B_1,B_2)$中的函数的迹$f(0)$所组成的空间，它称为W 的迹空间，T 赋以范数

$$\|u\|_T=\inf_{\substack{u=f(0)\\ f\in W}}\|f\|_W$$

是 Banach 空间.

T 是B_1+B_2 的子空间且拓扑地“处于 B_1 和 B_2 之间”，其意义后面将会变得明朗.

在展开迹空间T的一些性质的讨论之前，我们准备一个后面需要的关于W的引理.

7.15 引理 若 $1\leqslant p<\infty$，W 中从$(0,\infty)$到 B_1 无穷次可微函数 f 组成的子空间在W 中稠密.

证明 在变换

$$t=e^{\tau}, f(e^{\tau})=\tilde{f}(\tau)$$

之下，我们有 $f\in W$ 当且仅当

$$\int_{-\infty}^{\infty}(e^{\theta p\tau}\|\tilde{f}(\tau)\|_{B_1}^p+e^{(\theta-1)p\tau}\|\tilde{f}'(\tau)\|_{B_2}^p)d\tau<\infty,$$

其中 $\theta=(1/p)+\nu$. 设 J_ε 是 2.17 节中的软化子，则正象引理 2.18 中一样，$J_\varepsilon*\tilde{f}$ 从 R 到 B_1 无穷次可微，且

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{\theta p\tau}\|J_\varepsilon*\tilde{f}(\tau)-\tilde{f}(\tau)\|_{B_1}^p$$
$$+e^{(\theta-1)p\tau}\|(J_\varepsilon*\tilde{f})'(\tau)-\tilde{f}'(\tau)\|_{B_2}^p)d\tau=0.$$

于是 $f_n(t)=J_{1/n}*\tilde{f}(\log t)$ 在 $0<t<\infty$ 无穷次可微，取值在 B_1 中. 因此在 W 中 $f_n\to f$，引理证完. ▌

现着手研究迹空间 T 的内插性质.

7.16 引理 设 $\theta=(1/p)+\nu$ 满足 $0<\theta<1$，则

(a) 每一 $u\in T$ 满足

$$\|u\|_T=\inf_{\substack{f\in W\\ f(0)=u}}\|t^\nu f;L^p(0,\infty;B_1)\|^{1-\theta}\|t^\nu f';L^p(0,\infty;B_2)\|^\theta; \quad (6)$$

(b) 若 $u\in B_1\cap B_2$，则 $u\in T$ 且

$$\|u\|_T\leqslant K\|u\|_{B_1}^{1-\theta}\|u\|_{B_2}^\theta, \quad (7)$$

其中 K 是一个不依赖于 u 的常数.

证明 (a) 固定 $u\in T$ 和 $\varepsilon>0$，令 $f\in W$ 满足 $f(0)=u$ 和 $\|f\|_W\leqslant\|u\|_T+\varepsilon$，令

$$R=\|t^\nu f;L^p(0,\infty;B_1)\|, S=\|t^\nu f';L^p(0,\infty;B_2)\|.$$

对任意 $\lambda>0$，函数 $f_\lambda(t)=f(\lambda t)$ 也属于 W 且满足 $f_\lambda(0)=u$. 而且有

$$\|t^\nu f_\lambda;L^p(0,\infty;B_1)\|=\lambda^{-\theta}R,$$
$$\|t^\nu(f_\lambda)';\ L^p(0,\infty;\ B_2)\|=\lambda^{1-\theta}S.$$

当选择 $\lambda=R/S$，两表达式都等于 $R^{1-\theta}S^\theta$，因此

$$\begin{aligned}\max(R,S)=\|f\|_W&\leqslant\|u\|_T+\varepsilon\\&\leqslant\inf_{\lambda>0}\|f_\lambda\|_W+\varepsilon\\&\leqslant\inf_{\lambda>0}\ \max(\lambda^{-\theta}R,\lambda^{1-\theta}S)+\varepsilon\\&\leqslant R^{1-\theta}S^\theta+\varepsilon\leqslant\max(R,S)+\varepsilon.\end{aligned}$$

因 ε 是任意的，(6)立刻得证.

(b) 令 $\phi\in C^\infty((0,\infty))$ 满足 $\phi(0)=1$，当 $t\geqslant1$，$\phi(t)=0$；对所有 $t\geqslant0$，$|\phi(t)|\leqslant1$ 且 $|\phi'(t)|\leqslant K_1$. 若 $u\in B_1\cap B_2$，令 $f(t)=\phi(t)u$，则有 $u=f(0)$. 今有

$$\|t^\nu f;\ L^p(0,\infty;B_1)\|\leqslant K_2\|u\|_{B_1},$$

其中 $K_2=\left\{\int_0^1 t^{\nu p}dt\right\}^{1/p}$. 类似地

$$\|t^\nu f';\ L^p(0,\infty;B_2)\|\leqslant K_1K_2\|u\|_{B_2}.$$

因此 $f\in W$ 且从(6)推出(7).▌

上面的引理提出了当 $0<\theta<1$ 时 T"处于 B_1 和 B_2 之间"的意义. 有时就说对应于所有这样的 θ 的空间 T 组成内插于 B_1 和 B_2 之间的 Banach 空间的一个外壳. T 的许多性质可根据下述内插定理从 B_1 和 B_2 的相应性质推出.

7.17 定理 假设 $B_1\cap B_2$ 在 B_1 和 B_2 中稠密. 设 $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$ 和 $\widetilde{X}$ 是跟 7.11 节中的 B_1, B_2 和 X 有同样性质的三个空间. 设 L 是定义在 $B_1\cap B_2$，取值在 $\widetilde{B}_1\cap\widetilde{B}_2$ 的线性算子，又设对任意 $v\in B_1\cap B_2$ 有

$$\|Lv\|_{\widetilde{B}_1}\leqslant K_1\|v\|_{B_1},\tag{8}$$

$$\|Lv\|_{\widetilde{B}_2}\leqslant K_2\|v\|_{B_2}.\tag{9}$$

则 L 具有唯一的到 B_1 和 B_2(从而到 B_1+B_2) 分别满足 (8) 和 (9) 的连续延拓(仍记作 L)，满足

$$\|Lu\|_{\widetilde{B}_1+\widetilde{B}_2}\leqslant\max(K_1,K_2)\|u\|_{B_1+B_2}.$$

若 $0<\theta=(1/p)+\nu<1$，则对任意 $u\in T=T(p,\nu;B_1,B_2)$ 我们有 $Lu\in\widetilde{T}=T(p,\nu;\widetilde{B}_1,\widetilde{B}_2)$ 且

$$\|Lu\|_{\tilde{T}} \leqslant K_1^{1-\theta} K_2^{\theta} \|u\|_T. \tag{10}$$

证明 L 定义在 B_1+B_2 上, 从而定义在 T 上. 由 (6) 对 $u \in T$ 有

$$\|Lu\|_{\tilde{T}} = \inf_{\substack{\tilde{f} \in W \\ \tilde{f}(0)=Lu}} \|t^\nu \tilde{f}; L^p(0,\infty;\tilde{B}_1)\|^{1-\theta} \|t^\nu \tilde{f}'; L^p(0,\infty;\tilde{B}_2)\|^{\theta}.$$

又对任给 $\varepsilon>0$, 存在一个元素 $f \in W$, 满足 $f(0)=u$ 且

$$\|t^\nu f; L^p(0,\infty;B_1)\|^{1-\theta} \|t^\nu f'; L^p(0,\infty;B_2)\|^{\theta} < \|u\|_T + \varepsilon.$$

对 $t \geqslant 0$ 令 $\tilde{f}(t)=Lf(t)$, 于是 $\tilde{f}(0)=Lu$ 且

$$\|t^\nu \tilde{f}; L^p(0,\infty;\tilde{B}_1)\|^{1-\theta} \|t^\nu f'; L^p(0,\infty;\tilde{B}_2)\|^{\theta}$$

$$\leqslant K_1^{1-\theta} \|t^\nu f; L^p(0,\infty;B_1)\|^{1-\theta} K_2^{\theta} \|t^\nu f'; L^p(0,\infty;B_2)\|^{\theta}.$$

因此

$$\|Lu\|_{\tilde{T}} \leqslant K_1^{1-\theta} K_2^{\theta} (\|u\|_T + \varepsilon).$$

因为 ε 任意, (10) 得证. ∎

若用 $\|L\|_{L(S,\tilde{S})}$ 表示 S 到 $\tilde{S}$ 内连续线性算子的 Banach 空间 $L(S,\tilde{S})$ 中元素的范数, 则我们可把 (10) 写成形式

$$\|L\|_{L(T,\tilde{T})} \leqslant \|L\|_{L(B_1,\tilde{B}_1)}^{1-\theta} \|L\|_{L(B_2,\tilde{B}_2)}^{\theta}.$$

7.18 引理 设 $B_1 \cap B_2$ 在 B_1 和 B_2 中稠密, 又设存在同时属于 $L(B_1)$ 和 $L(B_2)$, 值域在 $B_1 \cap B_2$ 的线性算子序列 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$, 再设对每一 $b_i \in B_i$, $i=1,2$

$$\lim_{j\to\infty} \|P_j b_i - b_i\|_{B_i} = 0.$$

则对任一 $u \in T$ 我们有

$$\lim_{j\to\infty} \|P_j u - u\|_T = 0.$$

特别, $B_1 \cap B_2$ 在 T 中稠密.

证明 固定 $u \in T$, 选择 $f \in W$ 满足 $f(0)=u$. 令 $f_j(t)=P_j f(t)$. 若 $b_i \in B_i$, $i=1,2$, 存在一个整数 $j_0=j_0(b_i)$, 若 $j \geqslant j_0$ 有

$$\|P_j b_i - b_i\|_{B_i} \leqslant 1.$$

因此 $\{P_j b_i\}$ 在 B_i 有与 j 无关的界, $i=1,2$, 由一致有界原理, 存在常数 K_1 和 K_2 使对每一 j 有

$$\|P_j\|_{L(B_i)}\leqslant K_i.$$

由此

$$\|f_j(t)\|_B\leqslant K_1\|f(t)\|_B,\ \|f'_j(t)\|_{B_2}\leqslant K_2\|f'(t)\|_{B_2}.$$

因对几乎所有的 $t>0$，当 $j\to\infty$，$f_j(t)\to f(t)$（在B_1）且 $f'_j(t)\to f'(t)$（在B_2），由控制收敛定理 $t^\nu f_j\to t^\nu f$（在$L^p(0,\infty;B_1)$）且 $t^\nu f_j'\to t^\nu f'$（在 $L^p(0,\infty;B_2)$）. 因此 $f_j\to f$（在 W），$P_ju=P_jf(0)\to f(0)=u$（在 T）. 由于 $t^\nu f_j$ 和 $t^\nu f'_j$ 在 $B_1\cap B_2$ 取值，P_ju 属于 $B_1\cap B_2$. ∎

我们引述一个把迹空间的对偶空间表示成另一迹空间的定理，由于其证明相当长而省略，有兴趣的读者可在 Lions 的著作〔37〕中找到，那里研究比之上面稍许广泛的迹空间.（下一定理是〔37〕中第 II 章定理 1.1 的特殊情形.）

7.19 定理 设 B_1 和 B_2 是自反 Banach 空间且满足引理 7.18 的条件. 若 $1<p<\infty$，$(1/p)+\nu=\theta$ 满足 $0<\theta<1$，则 $(1/p')-\nu=1-(1/p)-\nu=1-\theta$ 且

$$[T(p,\nu;B_1,B_2)]'\cong T(p',-\nu;B_2',B_1').$$

特别，$T(p,\nu;B_1,B_2)$ 自反.

我们现在证明两个 L^p 空间之间的迹空间的嵌入定理，它在把 Sobolev 嵌入定理的某些方面推广到分数次空间时将起关键作用（见定理 7.57）. 设 Ω 是 R^n 中一个区域，则 $B_1=L^q(\Omega)$ 和 $B_2=L^p(\Omega)$ 连续嵌入拓扑向量空间 $X=L^1_{loc}(\Omega)$.（子集 $U\subset L^1_{loc}(\Omega)$ 称为开集，若对每一 $u\in U$ 存在 $\varepsilon>0$ 和 $K\subset\subset\Omega$ 使对每一 v，只要 $\|v-u\|_{0,1,K}<\varepsilon$，及 $v\in L^1_{loc}(\Omega)$，就有 $v\in U$.）

7.20 定理 设 p，q，θ 满足 $1\leqslant p\leqslant q<\infty$，$0<\theta<1$，$\theta=(1/p)+\nu$. 则

$$T(p,\nu,L^q(\Omega),L^p(\Omega))\to L^r(\Omega),\tag{11}$$

其中

$$1/r=[(1-\theta)/q]+(\theta/p).$$

证明 设 $f\in C^\infty([0,\infty])$，从等式

$$f(0)=f(t)-\int_0^t f'(\tau)d\tau$$

易得

$$|f(0)|\leqslant\int_0^1|f(t)|dt+\int_0^1|f'(t)|dt$$

$$\leqslant\left\{\left(\int_0^\infty t^{\nu p}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}+\left(\int_0^\infty t^{\nu p}|f'(t)|^p dt\right)^{1/p}\right\}$$

$$\times\left(\int_0^1 t^{-\nu p'}dt\right)^{1/p'}$$

$$=K_1(\|t^\nu f\|_{0,p,(0,\infty)}+\|t^\nu f'\|_{0,p,(0,\infty)}),$$

其中 由 $\theta=(1/p)+\nu<1$ 知 $K_1<\infty$. 由类似于引理 7.16(*a*)的证明中用的齐次性考虑可得

$$|f(0)|\leqslant 2K_1\|t^\nu f\|_{0,p,(0,\infty)}^{1-\theta}\ \|t^\nu f'\|_{0,p,(0,\infty)}^{\theta}. \tag{12}$$

现设 $f\in W(p,\nu;L^q(\Omega),L^p(\Omega))$，并暂设 f 从 $(0,\infty)$ 到 $L^q(\Omega)$ 无穷次可微. 令 $\tilde{f}(x,t)=f(t)(x)$，$0\leqslant t<\infty$，$x\in\Omega$. 由(12)我们有 $\tilde{f}(x,0)=\lim\limits_{t\to 0+}\tilde{f}(x,t)$对几乎所有 $x\in\Omega$满足

$$|\tilde{f}(x,0)|^r$$

$$\leqslant K_2\left(\int_0^\infty t^{\nu p}|\tilde{f}(x,t)|^p dt\right)^{(1-\theta)r/p}\left(\int_0^\infty t^{\nu p}\left|\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(x,t)\right|^p dt\right)^{\theta r/p},$$

由 Hölder 不等式,

$$\int_\Omega|\tilde{f}(x,0)|^r dx\leqslant K_2\left(\int_\Omega\left(\int_0^\infty t^{\nu p}|\tilde{f}(x,t)|^p dt\right)^{(1-\theta)rs/p}dx\right)^{1/s}$$

$$\times\left(\int_\Omega\left(\int_0^\infty t^{\nu p}\left|\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(x,t)\right|^p dt\right)^{\theta rs'/p}dx\right)^{1/s'},$$

其中$(1/s)+(1/s')=1$，若取 s 满足$(1-\theta)rs=q$，从而 $\theta rs'=p$，则有

$$\|\tilde{f}(\cdot,0)\|_{0,r,\Omega}\leqslant K_3\left(\int_\Omega\left(\int_0^\infty t^{\nu p}|\tilde{f}(x,t)|^p dt\right)^{q/p}dx\right)^{(1-\theta)/q}$$

$$\times\left(\int_\Omega\int_0^\infty t^{\nu p}\left|\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(x,t)\right|^p dtdx\right)^{\theta/p}$$

$$=K_3\left\|\int_0^\infty t^{\nu p}|f(t)|^p dt\right\|_{0,q/p,\Omega}^{(1-\theta)/p}\|t^\nu f';L^p(0,\infty,L^p(\Omega))\|^\theta$$

$$\leqslant K_3\left(\int_0^\infty t^{\nu p}\left\||f(t)|^p\right\|_{0,q/p,\Omega}dt\right)^{(1-\theta)/p}\|t^\nu f';L^p(0,\infty;L^p(\Omega))\|^\theta$$

$$=K_3\|t^\nu f;L^p(0,\infty;L^q(\Omega))\|^{1-\theta}\|t^\nu f';L^p(0,\infty;L^p(\Omega))\|^\theta.$$

由W中无穷次可微函数的稠密性(引理 7.15)，上述不等式对任意$f\in W$成立．由引理 7.16(a)

$$\|u\|_{0,r,\Omega}\leqslant\inf_{\substack{f\in W\\ f(0)=u}}K_3\|t^\nu f;L^p(0,\infty,L^q(\Omega))\|^{1-\theta}$$

$$\times\|t^\nu f';L^p(0,\infty;L^p(\Omega))\|^\theta$$

$$=K_3\|u\|_T.$$

这就建立了嵌入(11)． ▌

7.21 注 证明稍许修改，只要用$L^p(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$在$L^\infty(\Omega)$中的闭包代替$L^q(\Omega)$，上述定理可推广到$q=\infty$的情形．

迹空间的半群表征

7.22 设B是一个 Banach 空间，G是B上的连续半群；它一致有界，即存在常数M使

$$\|G(t)\|_{L(B)}\leqslant M,\ 0\leqslant t<\infty.$$

设A是G的无穷小生成子，A在B中的定义域$D(A)$赋以范数

$$\|u;D(A)\|=\|u\|_B+\|Au\|_B$$

是一个Banach 空间，并且是B的稠密向量子空间．空间$B_1=D(A)$和$B_2=X=B$满足 7.11 节的条件，只要$\theta=(1/p)+\nu<1$，我们可

相应地构造迹空间 $T=T(p,\nu;\ D(\Lambda),B)$. 定理 7.24 用包含半群 G 的一个明显的范数表征 T. 但首先我们推导一个后面需要的 Hardy, Littlewood 和 Póllya [28] 的不等式.

7.23 引理 设 f 是一个 $(0,\infty)$ 上 a.e. 定义的数值函数,令

$$g(t)=(1/t)\int_0^t f(\xi)d\xi.$$

若 $1\leqslant p<\infty$, $(1/p)+\nu=\theta<1$, 则

$$\int_0^\infty t^{\nu p}|g(t)|^p dt\leqslant[1/(1-\theta)^p]\int_0^\infty t^{\nu p}|f(t)|^p dt. \tag{13}$$

证明 我们总可假定(13)右端有穷. 在变换 $t=e^\tau$, $f(e^\tau)=\tilde{f}(\tau)$, $\xi=e^\sigma$, $g(e^\tau)=\tilde{g}(\tau)$ 之下, (13)变为

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\theta p\tau}|\tilde{g}(\tau)|^p d\tau\leqslant[1/(1-\theta)^p]\int_{-\infty}^\infty e^{\theta p\tau}|\tilde{f}(\tau)|^p d\tau. \tag{14}$$

注意

$$\tilde{g}(\tau)=e^{-\tau}\int_{-\infty}^\tau \tilde{f}(\sigma)e^\sigma d\sigma.$$

令 $E(\tau)=e^{\theta\tau}$,

$$F(\tau)=\begin{cases}e^{(\theta-1)\tau} & \text{当 } \tau>0\\ 0 & \text{当 } \tau\leqslant 0.\end{cases}$$

则 $E\cdot\tilde{g}=F*(E\cdot\tilde{f})$, 由 Young 定理 4.30

$$\|E\cdot\tilde{g}\|_{0,p,\mathbf{R}}\leqslant\|F\|_{0,1,\mathbf{R}}\|E\tilde{f}\|_{0,p,\mathbf{R}}.$$

由于 $\int_{-\infty}^\infty|F(\tau)|d\tau=1/(1-\theta)$, 上式正是(14). ∎

7.24 定理 设 Λ 是 Banach 空间 B 上一致有界连续半群 G 的无穷小生成子. 若 $1\leqslant p<\infty$ 且 $0<(1/p)+\nu<1$, 则 $T=T(p,\nu;\ D(\Lambda),B)$ 和范数

$$\|u\|_{T^\bullet}=(\|u\|_B^p+\int_0^\infty t^{(\nu-1)p}\|G(t)u-u\|_B^p dt)^{1/p} \tag{15}$$

有穷的所有 $u\in B$ 的空间 T^0 重合. 范数 $\|\cdot\|_T$ 和 $\|\cdot\|_{T^\bullet}$ 等价.

证明 首先设 $u\in T$, 选择 $f\in W$ 使 $f(0)=u$. 暂且假设 f 从 $(0,\infty)$

到 $D(\Lambda)$ 内无穷次可微. 令 $f'(t)-\Lambda f(t)=h(t)$. 若 $t\geqslant\varepsilon>0$.

由定理 7.10 得

$$f(t)=G(t-\varepsilon)f(\varepsilon)+\int_{\varepsilon}^{t}G(t-\tau)h(\tau)d\tau.$$

因此

$$G(t-\varepsilon)f(\tau)-f(\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{t}f'(\tau)d\tau-\int_{\varepsilon}^{t}G(t-\tau)h(\tau)d\tau.$$

在上式中令 $\varepsilon\to0+$, 由定义 $f(\varepsilon)\to f(0)$, 我们得

$$G(t)f(0)-f(0)=\int_{0}^{t}f'(\tau)d\tau-\int_{0}^{t}G(t-\tau)h(\tau)d\tau. \quad (16)$$

现在(16)对所有 $f\in W$ 成立, 因为由引理7.15, f 是一个从$(0,\infty)$到$D(\Lambda)$内无穷次可微函数序列$\{f_n\}$的极限. 因此对 $u\in T$ 和任意 $f\in W$, $f(0)=u$ 有

$$G(t)u-u=\int_{0}^{t}f'(\tau)d\tau-\int_{0}^{t}G(t-\tau)h(\tau)d\tau,$$

$$h(\tau)=f'(\tau)-\Lambda f(\tau).$$

这样一来

$$\left\|\frac{G(t)u-u}{t}\right\|_{B}\leqslant\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\left\|f'(\tau)\right\|_{B}d\tau+\frac{M}{t}\int_{0}^{t}\left\|h(\tau)\right\|_{B}d\tau,$$

其中我们利用了G 的一致有界性. 应用引理7.23, 令$\theta=(1/p)+\nu$, 我们得

$$\int_{0}^{\infty}t^{(\nu-1)p}\|G(t)u-u\|_{B}^{p}dt$$

$$\leqslant\frac{1}{(1-\theta)^{p}}\int_{0}^{\infty}t^{\nu p}(\|f'(t)\|_{B}+M\|h(t)\|_{B})^{p}dt$$

$$\leqslant\frac{2^{p-1}(M+1)^{p}}{(1-\theta)^{p}}(\|t^{\nu}f';L^{p}(0,\infty;B)\|^{p}+\|t^{\nu}\Lambda f;L^{p}(0,\infty;B)\|^{p})$$

$$\leqslant\frac{2^{p}(M+1)^{p}}{(1-\theta)^{p}}\|f\|_{W}^{p}.$$

因为这对任意满足 $f(0)=u$ 的 $f\in W$ 成立，我们有

$$\int_0^\infty t^{(\nu-1)p}\|G(t)u-u\|_B^p dt\leqslant\left(\frac{2M+2}{1-\theta}\right)^p\|u\|_T^p.$$

另外，B 上的等同算子提供 B 到 B 内和 $D(\Lambda)$ 到 B 内的嵌入，每一嵌入有嵌入常数 1．由定理 7.17，我们同样有 $T\to B$，且 $\|u\|_B\leqslant\|u\|_T$．因此 $u\in T$ 导出 $u\in T^0$，并且

$$\|u\|_{T^0}\leqslant\left(1+\frac{2M+2}{1-\theta}\right)\|u\|_T.$$

反之，设 $u\in T^0$．令 $\Phi\in C^\infty([0,\infty])$，它满足 $\Phi(0)=1$，当 $t\geqslant 1$ 时 $\Phi(t)=0$，当 $t\geqslant 0$ 时 $|\Phi(t)|\leqslant 1$，$|\Phi'(t)|\leqslant K_1$．令

$$f(t)=\Phi(t)g(t),$$

其中

$$g(t)=(1/t)\int_0^t G(\tau)ud\tau,\ t>0. \tag{17}$$

为了证明 $u\in T$ 且 $\|u\|_T\leqslant K_2\|u\|_{T^0}$，只要证明 $f\in W$ 且

$$\|f\|_W\leqslant K_2\|u\|_{T^0}. \tag{18}$$

[因由引理 7.8 (a)，$f(0)=\lim\limits_{t\to 0+}\Phi(t)g(t)=u$.] 而这可由证明 $t^\nu g\in L^p(0,1;D(\Lambda))$ 和 $t^\nu g'\in L^p(0,1;B)$ 且带适当的被 $K_3\|u\|_{T^0}$ 界住的范数而办到.

由引理 7.8 (b)，$\int_0^t G(\tau)ud\tau\in D(\Lambda)$ 且

$$\Lambda\int_0^t G(\tau)ud\tau=G(t)u-u.$$

于是

$$\int_0^1 t^{\nu p}\|g(t);D(\Lambda)\|^p dt$$
$$=\int_0^1 t^{(\nu-1)p}\left(\left\|\int_0^t G(\tau)ud\tau\right\|_B+\left\|\Lambda\int_0^t G(\tau)ud\tau\right\|_B\right)^p dt$$
$$\leqslant 2^{p-1}M^p\|u\|_B^p\int_0^1 t^{\nu p}dt+2^{p-1}\int_0^\infty t^{(\nu-1)p}\|G(t)u-u\|_B^p dt\ .$$

$$\leqslant 2^{p-1}\max(M^p/\theta p, 1)\|u\|_{T^0}^p.$$

因为

$$g'(t)=(1/t)G(t)u-(1/t^2)\int_0^t G(\tau)ud\tau$$

$$=(1/t)(G(t)u-u)-(1/t^2)\int_0^t (G(\tau)u-u)d\tau,$$

又因为

$$\int_0^1 t^{\nu p}\left\|\frac{G(t)u-u}{t}\right\|_B^p dt\leqslant \|u\|_T^p,$$

并由引理 7.23，将 ν 代之以 $\nu-1$,

$$\int_0^1 t^{\nu p}\left\|(1/t^2)\int_0^t (G(\tau)u-u)d\tau\right\|_B^p dt$$

$$\leqslant[1/(2-\theta)^p]\int_0^\infty t^{(\nu-1)p}\|G(t)u-u\|_B^p dt$$

$$\leqslant[1/(2-\theta)^p]\|u\|_T^p.$$

因此我们有

$$\int_0^1 t^{\nu p}\|g'(t)\|_B^p d\tau\leqslant K_4\|u\|_T^p.$$

于是 $g\in W$，(18)成立，证明完毕. ▌

7.25 为我们的目的，尚需对定理 7:24 的作稍微的推广. 设 A_1, $A_2, \cdots, A_n$ 是交换的，一致有界的 B 上的连续半群 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的无穷小生成子的有限族.

$$\|G_j(t)\|_{L(B)}\leqslant M_j;\ 1\leqslant j\leqslant n,\ t\geqslant 0$$

$$G_j(s)G_k(t)=G_k(t)G_j(s);\ 1\leqslant j,k\leqslant n,\ s,t\geqslant 0.$$

令 B^n 表示乘积空间 $B\times B\times\cdots\times B$(n 个因子)，B^n 赋以范数

$$\|(b_1,b_2,\cdots,b_n)\|_{B^n}=\sum_{j=1}^n\|b_j\|_B$$

是一个 Banach 空间. A 是从 $D(A)=\bigcap_{j=1}^m D(A_j)$到 B^n 内由

$$Au=(A_1u, A_2u, \cdots, A_nu)$$

定义的算子.

我们留给读者推广引理 7.8，证明 $D(\Lambda)$ 在 B 中稠密，Λ 是闭算子，从而赋以了范数

$$\|u;D(\Lambda)\|=\|u\|_B+\|\Lambda u\|_{B^n}=\|u\|_B+\sum_{j=1}^{n}\|\Lambda_j u\|_B,$$

$D(\Lambda)$ 是一个 Banach 空间.

7.26 定理 设 $0<(1/p)+\nu<1$, $1\leqslant p<\infty$，则 $T=T(p,\nu;D(\Lambda),B)$ 和范数

$$\|u\|_{T^*}=\left(\|u\|_B^p+\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty t^{(\nu-1)p}\|G_j(t)u-u\|_B^p dt\right)^{1/p}$$

有穷的所有 $u\in B$ 组成的空间 T^0 重合. 范数 $\|\cdot\|_T$ 和 $\|\cdot\|_{T^*}$ 等价.

证明 证明跟定理 7.24 的证明差不多，只是代替(17)给的 $g(t)$ 我们置

$$g(t)=(1/t^n)\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t G_1(\tau_1)G_2(\tau_2)\cdots G_n(\tau_n)u\,d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_n.$$

细节留给读者.

7.27 例 令 $B=L^p(\mathbf{R}^n)$, $1\leqslant p<\infty$，对 $u\in B$ 令

$$(G_j(t)u)(x)=u(x_1,\cdots,x_j+t,\cdots,x_n);\quad j=1,2,\cdots,n.$$

显然 G_j 是 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上交换、一致有界($M_j=1$)且连续的半群.（事实上若允许 $t<0$ 则它们是群.）相应的无穷小生成子满足

$$D(\Lambda_j)=\{u\in L^p(\mathbf{R}^n):D_j u\in L^p(\mathbf{R}^n)\},$$
$$\Lambda_j u=D_j u,\ u\in D(\Lambda_j).$$

相应地，$D(\Lambda)=\bigcap_{j=1}^{n}D(\Lambda_j)=W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$. 由定理 7.26，范数

$$\left(\|u\|_{0,p,\mathbf{R}^n}^p+\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty t^{(\nu-1)p}\int_{\mathbf{R}^n}|u(x_1,\cdots,x_j+t,\cdots x_n)\right.$$
$$\left.-u(x_1,x_2,\cdots,x_n)|^p dx dt\right)^{1/p}$$

和空间 $T=T(p,\nu;W^{1,p}(\mathbf{R}^n),L^p(\mathbf{R}^n))$上的范数$\|u\|_T$等价，只要 $0<(1/p)+\nu<1$。

高 次 迹

7.28 至此，我们仅考虑了本身及其一阶导数 f' 满足从$[0,\infty]$到不同的 Banach 空间的可积条件的函数的迹 $f(0)$. 我们现在推广迹的概念以获得值 $f^{(j)}(0),0\leqslant j\leqslant m-1$，只要 $f,f',\cdots,f^{(m)}$满足一定的可积性条件. 作为这种推广的一个结果，后面我们将可表征 $W^{m,p}(\Omega)$中的函数在正则区域Ω边界上的迹.

7.29 设B是一个 Banach 空间，$\Lambda_1,\cdots,\Lambda_n$ 是B上交换、一致有界、连续半群 $G_1\cdots,G_n$ 的无穷小生成子. 对每一重指标α我们用归纳法定义B上的子空间 $D(\Lambda^\alpha)$ 和 $D(\Lambda^\alpha)$ 上相应线性算子 Λ^α 如下:

若 $\alpha=(0,0,\cdots,0)$，则 $D(\Lambda^\alpha)=B$, $\Lambda^\alpha=I$, B上等同算子.

若 $\alpha=(0,\cdots,1,\cdots,0)$（1 在第 j 个位置），则 $D(\Lambda^\alpha)=D(\Lambda_j)$且 $\Lambda^\alpha=\Lambda_j$.

若对所有满足$|\beta|\leqslant r$的β已经定义了$D(\Lambda^\beta)$和Λ^β，设$|\alpha|=r+1$，则

$$D(\Lambda^\alpha)=\{u:u\in D(\Lambda^\beta)\text{且对所有 }\beta<\alpha,\quad \Lambda^{\alpha-\beta}u\in D(\Lambda^\beta)\},$$

$$\Lambda^\alpha=\Lambda_1^{\alpha_1}\cdots\Lambda_n^{\alpha_n}.$$

设 k 是一个正整数，令 $D(\Lambda^k)=\bigcap_{|\alpha|\leqslant k}D(\Lambda^\alpha)$. 把验证下述事实的任务留给读者（例如用关于 k 的归纳法.）.：$D(\Lambda^k)$在B中稠密，$\Lambda^k=(\Lambda^\alpha)_{|\alpha|\leqslant k}$ 是 $D(\Lambda^k)$到 $\prod_{|\alpha|\leqslant k}B$ 内的闭算子，从而 $D(\Lambda^k)$赋以范数

$$\|u:D(\Lambda^k)\|=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|\Lambda^\alpha u\|_B$$

是 Banach 空间.

7.30 对正整数m和实数p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 用$W^m=W^m(p,\nu;A;B)$表示满足

$$t^\nu f^{(k)}\in L^p(0,\infty;D(A^{m-k})),\ 0\leqslant k\leqslant m$$

的$(0,\ \infty)$到B内可测函数(的等价类)的空间, $f^{(k)}$是f的广义导数d^kf/dt^k. 空间W^m赋以范数

$$\|f\|_{W^m}=\max_{0\leqslant k\leqslant m}\|t^\nu f^{(k)};L^p(0,\infty;D(A^{m-k}))\|$$

是 Banach 空间. 注意$W^1=W(p,\nu;D(A),B)$, $D(A)$和 7.25 节的一样.

7.31 **引理** 设$f\in W^m$, $m\geqslant 1$. 若$0\leqslant k\leqslant m-1$, α是重指标, $|\alpha|+k\leqslant m-1$, 则函数$f_{\alpha k}=A^\alpha f^{(k)}\in W^1$且

$$\|f_{\alpha k}\|_{W^1}\leqslant\|f\|_{W^m}.$$

证明 对$1\leqslant p<\infty$我们有

$$\begin{aligned}&\|t^\nu f_{\alpha k};L^p(0,\infty;D(A)\|^p\\&=\int_0^\infty t^{\nu p}\Big(\|A^\alpha f^{(k)}(t)\|_B+\sum_{j=1}^n\|A_jA^\alpha f^{(k)}(t)\|_B\Big)^p dt\\&\leqslant\int_0^\infty t^{\nu p}\Big(\sum_{|\beta|\leqslant m-k}\|A^\beta f^{(k)}(t)\|_B\Big)^p dt\\&=\|t^\nu f^{(k)};L^p(0,\infty;D(A^{m-k}))\|^p\leqslant\|f\|^p_{W^m}.\end{aligned}$$

还有,

$$\begin{aligned}\|t^\nu f'_{\alpha k};L^p(0,\ \infty;B)\|^p&=\int_0^\infty t^{\nu p}\|A^\alpha f^{(k+1)}(t)\|_B^p dt\\&\leqslant\int_0^\infty t^{\nu p}\Big(\sum_{|\beta|\leqslant m-k-1}\|A^\beta f^{(k+1)}(t)\|_B\Big)^p dt\\&=\|t^\nu f^{(k+1)};L^p(0,\infty;D(A^{m-k-1}))\|^p\leqslant\|f\|^p_{W^m},\end{aligned}$$

于是引理得证. ▊

7.32 让我们此后假定: $0<(1/p)+\nu<1$, 用T^0表示对应W^1的迹空间$T(p,\nu;D(A),B)$. 由定理 7.26, 可在T^0上取范数

$$\|u\|_{T^0}=(\|u\|_B^p+\|u\|_G^p)^{1/p},$$

其中

$$\|u\|_G=\left(\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty t^{(\nu-1)p}\|G_j(t)u-u\|_B^p dt\right)^{1/p}.$$

高次迹空间可定义如下：对 $k=0, 1, 2, \cdots$ 我们定义 $T^k=T^k(p,\nu;\Lambda;B)$ 是所有满足 $\Lambda^\alpha u\in T^0(|\alpha|\leqslant k)$ 的 $u\in D(\Lambda^k)$ 的元素组成的空间. 空间 T^k 赋以范数

$$\|u\|_{T^k}=(\|u;D(\Lambda^k)\|^p+\sum_{|\alpha|=k}\|\Lambda^\alpha u\|_G^p)^{1/p}$$

是 Banach 空间.

由引理 7.31 和 7.13 推出若 $f\in W^m$, $|\alpha|\leqslant m-k-1$, 则 $\Lambda^\alpha f^{(k)}(0)$ 在 T^0 中存在, 且

$$\|\Lambda^\alpha f^{(k)}(0)\|_{T^0}\leqslant K_{\alpha k}\|f\|_{W^m},$$

其中 $K_{\alpha k}$ 是依赖于 α 和 k 的常数. 因此 $f^{(k)}(0)\in T^{m-k-1}$ 且

$$\|f^{(k)}(0)\|_{T^{m-k-1}}=(\|f^{(k)}(0),D(\Lambda^{m-k-1})\|^p+\sum_{|\beta|=m-k-1}\|\Lambda^\beta f^k(0)\|_G^p)^{1/p}\leqslant K_k\|f\|_{W^m}.$$

由此推出线性映射

$$f\to(f(0),f'(0)\cdots,f^{(m-1)}(0)) \tag{19}$$

从 W^m 到 $T^{m-1}\times T^{m-2}\times\cdots\times T^0=\prod_{k=0}^{m-1}T^{m-k-1}$ 连续, 即

$$\sum_{k=0}^{m-1}\|f^{(k)}(0)\|_{T^{m-k-1}}\leqslant K\|f\|_{W^m}.$$

我们下面证明这一映射是映上的(参看 Lions[38]).

7.33 定理 映射(19)的象是 $\prod_{k=0}^{m-1}T^{m-k-1}$. 若 $(u_0,u_1,\cdots u_{m-1})\in\prod_{k=0}^{m-1}T^{m-k-1}$ 则存在 $f\in W^m$ 使 $f^{(k)}(0)=u_k$, $0\leqslant k\leqslant m-1$, 且

$$\|f\|_{W^m}\leqslant K_0\sum_{k=0}^{m-1}\|u_k\|_{T^{m-k-1}}$$

证明 证明类似于定理 7.24 的第 2 部分，自然更复杂. 为简单计我们将仔细讨论 $n=1$ 的情形，这样 Λ_j 成为 Λ 而 Λ^α 成为 Λ^k ($|\alpha|=k$).

假使我们对每一k，$0\leqslant k\leqslant m-1$，构造了函数 $f_k\in W^m$，满足 $f_k^{(k)}(0)=u_k$，

且

$$\|f_k\|_{W^m}\leqslant K_k\|u_k\|_{T^{m-k-1}},\ 0\leqslant k\leqslant m-1.$$

令 $\lambda_{r,k}$，$0\leqslant r\leqslant m-1$，满足非奇异方程组

$$\sum_{r=0}^{m-1} r^j\lambda_{r,k}=\begin{cases}1 & 若\ j=k\\ 0 & 0\leqslant j\leqslant m-1,\ j\neq k.\end{cases}$$

则函数

$$g_k(t)=\sum_{r=0}^{m-1}\lambda_{r,k}f_k(rt)$$

满足

$$g_k^{(k)}(0)=u_k,\ g_k^{(j)}(0)=0,\ 0\leqslant j\leqslant m-1,\ j\neq k.$$

进而容易验证

$$\|g_k\|_{W^m}\leqslant\widetilde{K}_k\|f_k\|_{W^m}.$$

因此函数 $f(t)=\sum_{k=0}^{m-1}g_k(t)$ 具有定理陈述中所要求的性质. 这样我们只需构造 f_k.

以下证明中，我们将广泛使用$[0,\infty)$上算子值函数的卷积. 如果对 $t\geqslant0$，$F_1(t)$和 $F_2(t)$属于 $L(B)$，我们用

$$F_1*F_2(t)b=\int_0^t F_1(t-\tau)F_2(\tau)b\,d\tau,\ b\in B$$

定义$[0,\infty)$到 $L(B)$内的 F_1*F_2. (假定所有我们使用的算子是可交换的.)如果 F_1 从$[0,\infty)$到 $L(B)$内连续可微，显然有

$$(F_1 * F_2)'(t) = F'_1 * F_2(t).$$

我们用 $F^{((m))}$表示有 m 个因子的卷积 $F*F*\cdots*F$; 由于对相互交换的因子 * 是结合的, $F^{((m))}$ 被一意确定. 若 $I(t)=I$ 表示 B 上的等同映射, 显然有

$$I^{((m))}(t) = [t^{m-1}/(m-1)!]I.$$

若 G 是无穷小生成子为 A 的连续半群, 由引理 7.8 我们有

$$A(I*G) = G - I.$$

又当下式两端限制在 $D(A)$ 的元素上,

$$I * AG = G - I.$$

给定 $u = u_k \in T^{m-k-1}$, 我们定义

$$f_k(t) = [(m+k)!/k!]\phi(t)g(t),$$

其中 $\phi \in C([0,\infty))$满足: 当 $t \leqslant \frac{1}{2}$, $\phi(t)=1$, 当 $t \geqslant 1$, $\phi(t)=0$, 并且 $|\phi^{(j)}(t)| \leqslant K_1$, $0 \leqslant j \leqslant m$ 又其中

$$g(t) = t^{-m} I^{((k+1))} * G^{((m))}(t)u. \tag{20}$$

[注意当 $m=1$ 且 $k=0$ 时这里给出的 g 和定理 7.24 证明中(17)给出的相同.] 我们必须验证

$$f_k^{(k)}(0) = u, \tag{21}$$

且

$$\|f_k\|_{W^m} \leqslant K_2 \|u\|_{T^{m-k-1}}. \tag{22}$$

由于当 $t \leqslant \frac{1}{2}$ 时 ϕ 是常数, 为证(21)只需指出

$$g^{(k)}(0) = [k!/(m+k)!]u.$$

首先有

$$\begin{aligned} g(t) &= t^{-m} I^{((k+1))} * (G - I + I)^{((m))}(t)u \\ &= t^{-m} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} I^{((k+1+m-j))} * (G-I)^{((j))}(t)u. \end{aligned}$$

因为 $t^{-m} I^{((k+1+m-j))}(t) = (t^{k-j}/(k+m-j)!)I$, 当 $j>0$ 时其 k

次导数为 0，我们有

$$g^{(k)}(0)=\left(\frac{d}{dt}\right)^k\frac{t^k}{(k+m)!}\bigg|_{t=0}\quad I*(G-I)^{((0))}u=\frac{k!}{(k+m)!}u.$$

为建立(22)，显然只需证明

$$\int_0^1 t^{\nu p}\|\Lambda^i g^{(j)}(t)\|_B^p dt\leqslant K_3\|u\|_{T^{m-k-1}}^p \tag{23}$$

对任意满足 $0\leqslant j\leqslant m$ 及 $0\leqslant i\leqslant m-j$ 的 i，j 成立，我们区别三种情形.

情形 1　设 $0\leqslant j\leqslant k$　且 $m-k\leqslant i\leqslant m-j$. 令 $w=\Lambda^{m-k-1}u$，于是 $w\in B$，令 $l=k+1+i-m$，于是 $l\geqslant 1$ 且 $k+1-l\geqslant j$. 现在

$$\Lambda^i g(t)=t^{-m}I^{((k+1-l))}*\Lambda^l I^{((l))}*G^{((l))}*G^{((m-l))}(t)w.$$

因为 $\Lambda(I*G)=G-I$，我们有

$$\Lambda^l I^{((l))}*G^{((l))}=(G-I)^{((l))},$$

于是

$$\Lambda^i g(t)=t^{-m}I^{((k+1-l))}*G^{((m-l))}*(G-I)^{((l))}(t)w.$$

因为 $k+1-l\geqslant j$，对 $t>0$ 我们有

$$\Lambda^i g^{(j)}(t)=\sum_{r=0}^{j}w_r(t),$$

其中

$$w_r(t)=\widetilde{K}_r t^{-m-r}I^{((k+1-l-j+r))}*G^{((m-l))}*(G-I)^{((l))}(t)w.$$

现在

$$\|I^{((k+1-l-j+r))}*G^{((m-l))}*(G-I)^{((l-1))}\|_{L(B)}$$
$$\leqslant K_4 t^{(k+1-l-j+r)+(m-l)+(l-1)-1}=K_4 t^{2m-i-j+r-2},$$

因此

$$\|w_r(t)\|_B\leqslant K_5 t^{-m-r}\int_0^t(t-\tau)^{2m-i-j+r-2}\|G(\tau)w-w\|_B d\tau$$
$$\leqslant K_5 t^{m-i-j-2}\int_0^t\|G(\tau)w-w\|_B d\tau.$$

因为 $i\leqslant m-j$, 因此我们对 $0<t\leqslant 1$ 得

$$\|\Lambda^i g^{(j)}(t)\|_B\leqslant K_6 t^{-2}\int_0^t \|G(\tau)w-w\|_B d\tau.$$

由引理 7.23 (ν 代之以 $\nu-1$)

$$\int_0^1 t^{\nu p}\|\Lambda^i g^{(j)}(t)\|_B^p dt$$

$$\leqslant K_6\int_0^1 t^{(\nu-1)p}\left(1/t\int_0^t \|G(\tau)w-w\|_B d\tau\right)^p dt$$

$$\leqslant K_7\int_0^\infty t^{(\nu-1)p}\ \|G(t)w-w\|_B^p dt$$

$$\leqslant K_7\|w\|_{T^0}^p\leqslant K_7\|u\|_{T^{m-k-1}}$$

情形 2　设 $0\leqslant j\leqslant k$ 且 $0\leqslant i\leqslant m-k-1$. 则 $w=\Lambda^i u\in B$ 且

$$\Lambda^i g(t)=t^{-m}I^{((k+1))*}G^{((m))}(t)w.$$

因此

$$\Lambda^i g^{(j)}(t)=\sum_{r=0}^{j} w_r(t)=\sum_{r=0}^{j}\widetilde{K}_r t^{-m-r}I^{((k+1-j+r))*}G^{((m))}(t)w.$$

今有

$$\|w_r(t)\|_B\leqslant K_8 t^{-m-r+(k+1-j+r)-1+m}\|w\|_B=K_8 t^{k-j}\|w\|_B.$$

于是

$$\|\Lambda^i g^{(j)}(t)\|_B\leqslant K_9 t^{k-j}\|w\|_B,$$

且

$$\int_0^1 t^{\nu p}\|\Lambda^i g^{(j)}(t)\|_B^p dt\leqslant K_9^p\|w\|_B^p=K_9^p\|\Lambda^i u\|_B\leqslant K_9^p\|u\|_{T^{m-k-1}}.$$

情形 3　设 $k+1\leqslant i\leqslant m$ 且 $0\leqslant i\leqslant m-j$, 则 $i\leqslant m-k-1$ 且 $\tilde{u}=\Lambda^i u\in T^{m-k-1-i}$,

$$\|\tilde{u}\|_{T^{m-k-1-i}}\leqslant\|u\|_{T^{m-k-1}}.$$

令 $h(t)=\Lambda^i g(t)$, 则

$$h(t)=t^{-m}I^{((k+1))*}G^{((m))}(t)\tilde{u}. \tag{24}$$

在这种情形下为证(23)只需指出

$$\int_0^1 t^{\nu p}\|h^{(j)}(t)\|_B^p dt \leqslant K_{10}\|\tilde{u}\|_{T^{m-k-1-i}}^p. \tag{25}$$

由 $G=A(I*G)+I$ 得

$$h(t)=t^{-m}I^{((k+2))}*G^{((m))}(t)A\tilde{u}+t^{-m}I^{((k+2))}*G^{((m-1))}(t)\tilde{u}.$$

再重复 $m-1$ 次这一推理得

$$h(t)=\sum_{l=0}^{m-1}t^{-m}I^{((k+2+l))}*G^{((m-l))}(t)A\tilde{u}+t^{-m}I^{((k+1+m))}(t)\tilde{u}.$$

为了证明(25)，我们可以忽略

$$t^{-m}I^{((k+1+m))}(t)\tilde{u}=[t^k/(k+m)!]\tilde{u}$$

这一项，因为这一项的 j 阶导数当 $t>0$ 时为0．相应地我们考虑①

$$h(t)\sim\sum_{l=0}^{m-1}t^{-m}I^{((k+2+l))}*G^{((m-l))}A\tilde{u}. \tag{26}$$

再重复从(24)导出(26)的推理 $m-k-i-2$ 次，每一次丢掉对 $h^{(j)}$ 没有贡献的次数 $\leqslant j-1$ 的多项式的项，这就导出

$$h(t)\sim\sum_{l=0}^{m-1}t^{-m}I^{((k+2+(m-k-i-2)+l))}*G^{((m-l))}(t)A^{m-k-1-i}\tilde{u}.$$

令 $w=A^{m-k-1-i}\tilde{u}=A^{m-k-1}u$．上述和中的项形如

$$w_l(t)=t^{-m}I^{((m+l-i))}*G^{((m-l))}(t)w,$$

其中 $0\leqslant l\leqslant m-1$．注意 $m+l-i\geqslant j$．为证(25)只需指出

$$\int_0^1 t^{\nu p}\|w_l^{(j)}(t)\|_B^p dt \leqslant K_{11}\|w\|_{T^0}^p. \tag{27}$$

这里我们必须再区分两种情况 $i\leqslant m-j-1$ 和 $i=m-j$．

若 $i\leqslant m-j-1$ 则 $w_l^{(j)}$ 是形如

$$t^{-m-r}I^{((m+l-i-j+r))}*G^{((m-l))}(t)w$$

项的线性组合，它在 B 中的范数不超过

---

① 这里“～”表示 $h(t)$ 是右端和式中诸项的线性组合与次数 $\leqslant j-1$ 的多项式之和——译者注．

$$K_{12}t^{-m-r+(m+l-i-j+r-1)+m-l}\|w\|_B\leqslant K_{12}t^{m-j-i-1}\|w\|_{T'},$$

而(27)立刻导出，

若 $i=m-j$, 我们有

$$w_l(t)=t^{-m}I^{((j+l))}*G^{((m-l-1))}*(G-I+I)(t)w$$
$$=t^{-m}I^{((j+l))}*G^{((m-l-1))}*(G-I)(t)w$$
$$+t^{-m}I^{((j+l+1))}*G^{((m-l-1))}(t)w,$$

对后一项再重复这一手续 $m-l-1$ 次就得

$$w_l(t)=\sum_{s=0}^{m-l-1}t^{-m}I^{((j+l+s))}*G^{((m-l-s-1))}*(G-I)(t)w$$
$$+t^{-m}I^{((j+m))}(t)w.$$

可以再次丢掉对(27)左端没有贡献的项. 因此, 为建立(27), 只需用

$$w_{ls}(t)=t^{-m}I^{((j+l+s))}*G^{((m-l-s-1))}*(G-I)(t)w$$

代替 w_l 来建立(27). 而 $w_{ls}^{(j)}(t)$ 是对 $0\leqslant r<j$ 形如

$$t^{-m-r}I^{((l+s+r))}*G^{((m-l-s-1))}*(G-I)(t)w$$

的项的线性组合. 象在情形 1 一样, 对 $0<t\leqslant1$ 有

$$\|w_{ls}^{(j)}(t)\|_B\leqslant K_{13}t^{-2}\int_0^t\|G(\tau)w-w\|_Bd\tau,$$

再用引理 7.23 就推得(27)成立. 这就完成了证明. ∎

我们注意对一般的 n 的证明本质上类似于上面对 $n=1$ 给出的. 代替(20)我们用(加一适当倍数的)

$$g(t)=t^{-mn}I^{((k+1))}*G_1{}^{((m))}*\cdots*G_n{}^{((m))}(t)u.$$

7.34 例 令 $B=L^p(\mathbf{R}^n)$ 而 G_j $(1\leqslant j\leqslant n)$ 如例 7.27 给出的那样, 于是 $\Lambda_j=D_j$. 显然

$$D(\Lambda^k)=\{u\in L^p(\mathbf{R}^n):D^\alpha u\in L^p(\mathbf{R}^n),\ |\alpha|\leqslant k\}=W^{k,p}(\mathbf{R}^n).$$

对每一 $u\in L^p(\mathbf{R}_+{}^{n+1})$, 由

$$\tilde{u}(t)(x_1,\cdots,x_n)=u(x_1,\cdots,x_n,t)$$

a.e. 定义由 $[0,\infty)$ 到 $L^p(\mathbf{R}^n)$内的 $\tilde{u}$，则只要 $\tilde{u}^{(k)}\in L^p(0,\ \infty;$ $W^{m-k,p}(\mathbf{R}^n)),\ 0\leqslant k\leqslant m$, 就有 $u\in W^{m,p}(\mathbf{R}_+{}^{n+1})$.

相应地

$$W^{m,p}(\mathbf{R}_+^{n+1})\simeq W^m(p,0;\Lambda;L^p(R^n)),$$

$\Lambda=(D_1,\cdots,D_n)$, 若 $1<p<\infty$, 映射 γ

$$\gamma: u\to(u(\cdot,\cdots,\cdot,0),D_{n+1}u(\cdot,\cdots,\cdot,0),\cdots,$$
$$D_{n+1}^{m-1}u(\cdot,\cdots,\cdot,0))$$

是 $W^{m,p}(\mathbf{R}_+{}^{n+1})/\ker\gamma$ 到乘积 $\prod_{k=0}^{m-1}T^{m-k-1}$ 上的一个同构和同胚，

其中

$$\begin{aligned}T^k&=T^k(p,0;\Lambda,L^p(\mathbf{R}^n))\\&=\{v\in W^{k,p}(\mathbf{R}^n):D^\alpha v\in T^0,\ |\alpha|\leqslant k\},\end{aligned}$$

且

$$\|v\|_{T^k}=\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|D^\alpha v\|_{0,p,\mathbf{R}^n}^p+\sum_{|\alpha|=k}\sum_{j=1}^n\int_0^\infty t^{-p}\right.$$
$$\left.\times\int_{\mathbf{R}^n}|D^\alpha v(x_1,\cdots,x_j+t,\cdots,x_n)-D^\alpha v(x_1,\cdots,x_n)|^p dx\,dt\right\}^{1/p}.$$

空间 $W^{s,p}(\Omega)$

7.35 我们现在对 $\mathbf{R}^n$ 中任意区域，任意值 s 和 $1<p<\infty$定义空间 $W^{s,p}(\Omega)$. 这些空间对整数值 s 同第三章定义的 $W^{m,p}(\Omega)$和 $W^{-m,p}(\Omega)$一致. 对 $s\geqslant 0$ 定义可推广到 $p=1$ 和 $p=\infty$，但我们暂不理会这些极限值.

空间 $B_1=W^{1,p}(\Omega)$和 $B_2=X=L^p(\Omega)$显然满足 7.11 节中设置的条件. 对 $0<\theta<1$ 令

$$T^{\theta,p}(\Omega)=T(p,\nu;W^{1,p}(\Omega),L^p(\Omega)),$$

其中 $\nu+(1/p)=\theta$, 记 $W=W(p,\nu;W^{1,p}(\Omega),L^p(\Omega))$, 我们写出 u

在 $T^{\theta,p}(\Omega)$中的范数

$$\|u;T^{\theta,p}(\Omega)\| = \inf_{\substack{f\in W\\ u=f(0)}} \max\left\{\left(\int_0^\infty t^{\nu p}\|f(t)\|_{1,p,\Omega}^p dt\right)^{1/p},\right.$$
$$\left.\left(\int_0^\infty t^{\nu p}\|f'(t)\|_{0,p,\Omega}^p dt\right)^{1/p}\right\}. \tag{28}$$

7.36 设 $s\geqslant 0$ 任意. 若 $s=m$ 是一个整数, 我们定义 $W^{s,p}(\Omega)=W^{m,p}(\Omega)$. 若 s 不是一个整数, 记 $s=m+\sigma$, m 是一个整数而 $0<\sigma<1$. 在这种情形,定义空间 $W^{s,p}(\Omega)$由所有这样的函数(的等价类)$u\in W^{m,p}(\Omega)$所组成, 其广义导数 $D^\alpha u$(任意$|\alpha|=m$)属于 $T^{1-\sigma,p}(\Omega)$. 则 $W^{s,p}(\Omega)$赋以范数

$$\|u\|_{s,p,\Omega}=\{\|u\|_{m,p,\Omega}^p+\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u;T^{1-\sigma,p}(\Omega)\|^p\}^{1/p} \tag{29}$$

是Banach 空间.

7.37 由

$$Pu=(u,(D^\alpha u)_{|\alpha|=m})$$

给定的算子(满足$|\alpha|=m$ 的重指标α以某种适当的次序排列)是从 $W^{s,p}(\Omega)$到(乘积)Banach 空间

$$S=W^{m,p}(\Omega)\times\prod_{|\alpha|=m}T^{1-\sigma,p}(\Omega)$$

的一个闭子空间上的一个等距同构,这里 S 赋以范数

$$\|(u,(v_\alpha)_{|\alpha|=m});S\|=\left\{\|u\|_{m,p,\Omega}^p+\sum_{|\alpha|=m}\|v_\alpha;T^{1-\sigma,p}(\Omega)\|^p\right\}^{1/p}.$$

因为 $W^{m,p}(\Omega)$和 $T^{1-\sigma,p}(\Omega)$是自反的(定理 3.5 和 7.19), 由定理 1.21 和 1.22 推出 $W^{s,p}(\Omega)$也是自反的.

7.38 定理 对任何 $s\geqslant 0$, $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$在 $W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$中稠密.

证明 这个结果对 $s=0$, 1,2,…已经证明(定理 2.19 和 3.18)特别说来 $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$在 $L^p(\mathbf{R}^n)$中稠密[即, 对于 $L^p(\mathbf{R}^n)$中的拓扑稠密]. 若 $s=m+\sigma>0$, m 是整数, 而 $0<\sigma<1$, 定理可证明如下.

设 $\psi\in C^\infty(\mathbf{R})$, 满足: 当 $t\leqslant 0$, $\psi(t)=1$, 当 $t\geqslant 1$, $\psi(t)=0$, 对

$j=1, 2, 3, \cdots$令 $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$定义如下:

$$\psi_j(x)=\psi(|x|-j).$$

设 J_ε 是 2.17 节中引入的软化子. 若 u 是 $\mathbf{R}^n$ 上 a.e. 定义的函数，令

$$P_j u = J_{1/j} * (\psi_j \cdot u), \ j=1, 2, \cdots$$

显然，当$m=0, 1, 2, \cdots$, P_j 是从$W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$到$W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$内的有界线性算子. 其值域在 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$中，由引理 2.18 和 3.15 推出若 $u \in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$，则

$$\lim_{j\to\infty} \|P_j u - u\|_{m,p,\mathbf{R}^n}=0.$$

由引理 7.18 推出若 $0<\theta<1$ 且 $u \in T^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)$ 则

$$\lim_{j\to\infty} \|p_j u - u; T^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)\|=0.$$

因为

$$D^\alpha P_j u = J_{1/j} * (D^\alpha(\psi_j \cdot u)) = P_j D^\alpha u + J_{1/j} * \omega_j,$$

其中

$$\omega_j = \sum_{\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\psi_j D^\beta u,$$

由于当 $u \in W^{|\alpha|,p}(\mathbf{R}^n)$时

$$\lim_{j\to\infty} \|\omega_j\|_{1,p,\mathbf{R}^n}=0,$$

于是对任何 $u \in W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$，当$|\alpha|=m$时我们有

$$\lim_{j\to\infty} \|D^\alpha P_j u - D^\alpha u; \ T^{1-\sigma,p}(\mathbf{R}^n)\|=0.$$

因此

$$\lim_{j\to\infty} \|P_j u - u\|_{s,p,\Omega}=0,$$

于是证明完成. ∎

7.39 用 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在空间 $W^{s,p}(\Omega)$ $(s\geqslant 0)$ 中的闭包. 由上述定理, $W_0^{s,p}(\mathbf{R}^n)=W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$. 对 $s<0$, 我们定义

$$W^{s,p}(\Omega)=[W_0^{-s,p'}(\Omega)]', \ (1/p)+(1/p')=1.$$

由自反性知对任意实的 s

$$[W^{s,p}(\mathbf{R}^n)]'\cong W^{-s,p'}(\mathbf{R}^n).$$

注意到当 $s<0$ 时，$\mathscr{D}(\Omega)=C_0^\infty(\Omega)$ 是 $W_0^{-s,p'}(\Omega)$ 的稠密子空间，$W^{s,p}(\Omega)$ 是 Ω 上的广义函数的空间，除此之外，关于 $W^{s,p}(\Omega)$ 的结构我们不再有什么进一步的解释.

空间 $W^{s,p}(\Omega)$ 的许多性质仅对 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 可以方便地证明，然后必须借助保持微分性质的延拓算子把定义在 Ω 上的函数延拓到 $\mathbf{R}^n$ 上而对一般区域推导出来(参看 4.24 节). 对分数 $s=m+\sigma$，空间 $W^{s,p}(\Omega)$ 适当的延拓由内插而获得. 对 Ω 的强 $(m+1)$-延拓算子自然是需要的. 例如假定 Ω 满足定理 4.26 的假设(还可参看 4.29节).

7.40　定理　若 $s=m+\sigma$，m 是整数，$0<\sigma<1$，如果存在对 $\mathbf{R}^n$ 中区域 Ω 的强 $(m+1)$-延拓算子 E，则 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中的函数在 Ω 上的限制的集合在 $W^{s,p}(\Omega)$ 稠密.

证明　(回忆结论对 $W^{m,p}(\Omega)$ 成立，只需假设 Ω 具有线段性质.)证明依照定理 7.38 证明的同一线索，只是代替算子 P_j 我们使用算子

$$\widetilde{P}_j u=R_\Omega P_j E u,\qquad u \text{ 定义在 } \Omega,$$

其中 R_Ω 是把 $\mathbf{R}^n$ 上的函数限制在 Ω 上的算子. 证明的细节留给读者. ∎

下面的局部化定理，除要求存在对 Ω 的强 $(m+1)$-延拓算子 E 外，还需要一个定理 4.26 提供的导数 $D^\alpha Eu(x)$ 的通过 u 的导数的表达式. 下述定理的假设必然对满足定理 4.26 条件的任何区域成立.

7.41　定理　设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域，对 Ω 存在一个 $(m+1)$-强延拓算子 E，且对 $|\gamma|\leqslant|\alpha|=m$ 存在从 $W^{1,p}(\Omega)$ 到 $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ 内和从 $L^p(\Omega)$ 到 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 内的连续线性算子 $E_{\alpha\gamma}$，若 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 则有

$$D^\alpha Eu(x)=\sum_{|\gamma|\leqslant m}E_{\alpha\gamma}D^\gamma u(x)\qquad \text{a.e. 于 } \mathbf{R}^n. \tag{30}$$

若 $s=m+\sigma>0$, $0\leqslant\sigma<1$, 则 $W^{s,p}(\Omega)$ 同 $W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 中的函数在 Ω 上的限制的集合重合.

证明 若 $\sigma=0$, 结果是对 Ω 的强 m-延拓存在性的直接推论. 今设 $0<\sigma<1$. 若 $u\in W^{s,p}(\Omega)$, 则 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 且 $Eu\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 满足

$$\|Eu\|_{m,p,\mathbf{R}^n}\leqslant K_1\|u\|_{m,p,\Omega}\leqslant K_1\|u\|_{s,p,\Omega}. \tag{31}$$

若 $|\gamma|\leqslant m$ 则 $D^\gamma u\in T^{1-\sigma,p}(\Omega)$ 并且

$$\|D^\gamma u;T^{1-\sigma,p}(\Omega)\|\leqslant K_2\|u\|_{s,p,\Omega}. \tag{32}$$

(这由定义知 $|\gamma|=m$ 时成立, 由引理 7.16 知当 $|\gamma|<m$ 时亦成立.) 因 $E_{\alpha\gamma}$ 从 $W^{1,p}(\Omega)$ 到 $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ 和从 $L^p(\Omega)$ 到 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 都是线性连续的, 由定理 7.17, 它从 $T^{1-\sigma,p}(\Omega)$ 到 $T^{1-\sigma,p}(\mathbf{R}^n)$ 也是连续的. 由(30)和(32)对 $|\alpha|=m$ 我们有

$$\|D^\alpha Eu;\ T^{1-\sigma,p}(\mathbf{R}^n)\|\leqslant K_3\|u\|_{s,p,\Omega}.$$

结合(31), 我们得

$$\|Eu\|_{s,p,\mathbf{R}^n}\leqslant K_4\|u\|_{s,p,\Omega},$$

因此 u 是 $Eu\in W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 在 Ω 上的限制.

反之, 对任何 m, 从 $\mathbf{R}^n$ 到 Ω 上的限制算子 R_Ω 从 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 到 $W^{m,p}(\Omega)$ 连续, 从而由定理 7.17 从 $W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 到 $W^{s,p}(\Omega)$ 亦连续, 于是 $u\in W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 在 Ω 上的限制 $R_\Omega u$ 属于 $W^{s,p}(\Omega)$. ∎

我们注意在定理的条件下, 延拓算子 E 对任何 s, $0\leqslant s\leqslant m+1$, 从 $W^{s,p}(\Omega)$ 到 $W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 内是连续的.

$W^{s,p}(\Omega)$ 的一个内在范数

7.42 我们现在研究对 $W^{s,p}(\Omega)$ ($s\geqslant0$) 构造一个新范数的可能性, 这个新范数等价于"迹范数"(29)(s 不是一个整数), 但它借助

于元素的内在性质来表达. 考虑到例 7.27, 最方便莫如由情形 $\Omega=R^n$ 开始. 按照 Lions 和 Magenes[34], 我们定义带内在范数的新空间 $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$, 然后指出至少对适当正则的区域 Ω, $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ 跟 $W^{s,p}(\Omega)$ 重合.

7.43 对 $0<\theta<1$, $1\leqslant p<\infty$ 令 $\widetilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$ 表示这样的函数(的等价类) u 的空间, 对于它, 范数

$$\|u;\widetilde{T}^{\theta,p}(\Omega)\|=\left\{\|u\|_{0,p,\Omega}^p+\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n-1+(1-\nu)p}}dxdy\right\}^{1/p} \tag{33}$$

有限, $\nu+(1/p)=\theta$.

7.44 引理 空间 $\widetilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)$ 同 Banach 空间 $T^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)$ 重合, 两空间的范数等价.

证明 $T^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)$ 中元素的范数[在(28)]曾被定义为它在迹空间 $T(p,\nu;W^{1,p}(\mathbf{R}^n),\ L^p(\mathbf{R}^n))$ 中的范数. 由例 7.27, 我们可以取范数为

$$\|u\|_T=\left\{\|u\|_{0,p,\mathbf{R}^n}^p+\sum_{j=1}^n\int_0^\infty t^{(\nu-1)p}\int_{\mathbf{R}^n}|u(x_1,\cdots,x_j+t,\cdots,x_n)\right.$$
$$\left.-u(x_1,\cdots,x_n)|^p dxdt\right\}^{1/p}.$$

让我们把(33)给出的范数记作 $\|u\|_{\widetilde{T}}$.

设 $u\in T^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)$. 令 $\lambda=\frac{1}{2}[(n-1)+(1-\nu)p]$ 且写 $u(x)-u(y)$ 成如下形式:

$$\sum_{j=1}^n[u(y_1,\cdots,y_{j-1},x_j,x_{j+1},\cdots,x_n)$$
$$-u(y_1,\cdots y_{j-1},y_j,x_{j+1},\cdots,x_n)],$$

我们有

$$\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n-1+(1-\nu)p}}dxdy\leqslant K_1\sum_{j=1}^n Q_j,$$

其中

$$Q_j=\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|u(y_1,\cdots,y_{j-1},x_j,\cdots,x_n)-u(y_1,\cdots,y_j,x_{j+1},\cdots,x_n)|^p$$

$$\times\frac{dxdy}{\left(\sum_{k=1}^n(x_k-y_k)^2\right)^\lambda}$$

于是 $Q_j=\int_{\mathbf{R}^j}dy_1\cdots dy_j$

$$\times\int_{\mathbf{R}^{n+1-j}}dx_j\cdots dx_n|u(y_1,\cdots,y_{j-1},x_j,\cdots,x_n)$$

$$-u(y_1,\cdots,y_j,x_{j+1},\cdots,x_n)|^pR_j, \tag{34}$$

其中 $$R_j=\int_{\mathbf{R}^{n-j}}\int_{\mathbf{R}^{j-1}}\frac{dx_1\cdots dx_{j-1}dy_{j+1}\cdots dy_n}{\left(\sum_{k=1}^n(x_k-y_k)^2\right)^\lambda}.$$

令 $\rho^2=(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_{j-1}-y_{j-1})^2+(x_{j+1}-y_{j+1})^2+\cdots+(x_n-y_n)^2$，则因 $\lambda>0$ 且 $n-1-2\lambda<0$,

$$R_j=K_2\left(\int_0^{|x_j-y_j|}+\int_{|x_j-y_j|}^\infty\right)\frac{\rho^{n-2}}{[\rho^2+(x_j-y_j)^2]^\lambda}d\rho$$

$$\leqslant\frac{K_2}{|x_j-y_j|^{2\lambda}}\int_0^{|x_j-y_j|}\rho^{n-2}d\rho+K_2\int_{|x_j-y_j|}^\infty\rho^{n-2-2\lambda}d\rho$$

$$=K_3|x_j-y_j|^{(\nu-1)p}. \tag{35}$$

在(34)中令

$$y_i=z_i,\ 1\leqslant i\leqslant j,\ x_j=t+y_j,\ x_i=z_i,\ j+1\leqslant i\leqslant n,$$

由(35)得

$$Q_j\leqslant 2K_3\int_0^\infty t^{(\nu-1)p}dt$$

$$\times\int_{\mathbf{R}^n}|u(z_1,\cdots,z_j+t,\cdots,z_n)-u(z_1,\cdots,z_n)|^pdz.$$

于是 $u\in\widetilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)$，且 $\|u\|_{\widetilde{T}}\leqslant K_4\|u\|_T$.

反之，设 $u\in\widetilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)$. 令 $x'=(x_2,\cdots,x_n)$和 $z'=(z_2,\cdots,z_n)$，在中心为$x'\in\mathbf{R}^{n-1}$，半径为 $\frac{1}{2}t$ 的球 $D(t,x')$上对 z' 积分不等式

$$\begin{aligned}&|u(x_1+t,x')-u(x_1,x')|^p\\&\leqslant K_5\left(\left|u(x_1+t,x')-u\left(x_1+\frac{1}{2}t,z'\right)\right|^p\right.\\&\quad\left.+\left|u\left(x_1+\frac{1}{2}t,z'\right)-u(x_1,x')\right|^p\right),\end{aligned}$$

得 $|u(x_1+t,x')-u(x_1,x')|^p\leqslant(K_6/t^{n-1})[I_t(t,x)+I_t(0,x)]$，其中对 $s=t$，或 $s=0$

$$I_t(s,x)=\int_{D(t;x')}\left|u(x_1+s,x')-u\left(x_1+\frac{1}{2}t,z'\right)\right|^p dz'.$$

今有

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty t^{(\nu-1)p}dt\int_{\mathbf{R}^n}\frac{1}{t^{n-1}}I_t(t,x)dx\\&=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}dx'\int_0^\infty\frac{1}{t^{2\lambda}}dt\\&\quad\times\int_{D(t;x')}dz'\int_{-\infty}^{\infty}\left|u(x_1+t,\ x')-u\left(x_1+\frac{1}{2}t,z'\right)\right|^p dx_1\\&=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}dx'\int_0^\infty\frac{1}{t^{2\lambda}}dt\\&\quad\times\int_{D(t;x')}dz'\int_{-\infty}^{\infty}\left|u(x_1,\ x')-u\left(x_1-\frac{1}{2}t,z'\right)\right|^p dx_1\\&=\int_{\mathbf{R}^n}dx\int_{\mathbf{R}^{n-1}}dz'\int_{2|z'-x'|}^{\infty}\frac{\left|u(x_1,\ x')-u\left(x_1-\frac{1}{2}t,z'\right)\right|^p}{t^{2\lambda}}dt\\&=2\int_{\mathbf{R}^n}dx\int_{\mathbf{R}^{n-1}}dz'\int_{-\infty}^{x_1-|z'-x'|}\frac{|u(x)-u(z)|^p}{[2(x_1-z_1)]^{2\lambda}}dz_1\\&\leqslant\frac{2}{2^\lambda}\int_{\mathbf{R}^n}dx\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|u(x)-u(z)|^p}{|x-z|^\lambda}dz,\end{aligned}$$

其中.我们作了替换$z_1=x_1-\frac{1}{2}t, dz_1=-\frac{1}{2}dt$, 并在倒第二行的内层积分中利用了$|x_1-z_1|\geqslant|x'-z'|$从而$|x_1-z_1|\geqslant(x-z)/\sqrt{2}$这一事实. 类似的不等式对$I_t(0,x)$亦成立. 于是

$$\int_0^\infty t^{(\nu-1)p}\int_{\mathbf{R}^n}|u(x_1+t,x_2,\cdots,x_n)$$
$$-u(x_1,\cdots,x_n)|^p dxdt$$
$$\leqslant K_7\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|u(x)-u(z)|^p}{|x-z|^{n-1+(1-\nu)p}}dxdz.$$

对于其他变量$x_2,\cdots,x_n$作的差, 类似的不等式也成立, 组合这些不等式我们即得$\|u\|_T\leqslant K_8\|u\|_{\tilde{T}}$. ▌

为推广上述引理到一般区域Ω, 我们需要下列延拓引理.

7.45 引理 设Ω是$\mathbf{R}^n$中的一个半空间或是$\mathbf{R}^n$中一个一致C^1正则且带有界边界的区域. 则存在一个把$L^p(\Omega)$映射到$L^p(\mathbf{R}^n)$的线性算子E使

$$Eu(x)=u(x)\quad \text{a. e. 于}\Omega,$$

并且若$0<\theta<1, u\in\tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$, 则$Eu\in\tilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)$且

$$\|Eu;\tilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)\|\leqslant K\|u;\tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)\|,$$

K不依赖于u.

证明 这里的证明十分类似于定理4.26的证明. 我们从情形$\Omega=\mathbf{R}^n_+=\{x\in\mathbf{R}^n:x_n>0\}$开始. 记$x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$, 对$u\in L^p(\Omega)$置

$$Eu(x)=\begin{cases}u(x) & \text{a. e. 于 }\mathbf{R}^n_+.\\ u(x',-x_n) & \text{a. e 于 }\mathbf{R}^n\sim\mathbf{R}^n_+.\end{cases}$$

则

$$\|Eu\|^p_{0,p,\mathbf{R}^n}=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}dx'\left\{\int_0^\infty|u(x)|^p dx_n+\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^0\left|u(x',-x_n)\right|^p dx_n\right\}$$

$$=2\|u\|^p_{0,p\mathbf{R}^n_+}.$$

又令 $2\lambda=n-1+(1-\nu)p=n+(1-\theta)p>0$, 我们有

$$\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|Eu(x)-Eu(y)|^p}{(x-y)^{2\lambda}}dxdy=I_{+-}+I_{+-}+I_{-+}+I_{--},$$

其中

$$I_{++}=\int_{\mathbf{R}^n_+}\int_{\mathbf{R}^n_+}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{(x-y)^{2\lambda}}dxdy$$

$$I_{+-}=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}dx'\int_{\mathbf{R}^{n-1}}dy'\int_0^\infty dx_n\int_{-\infty}^0\frac{|u(x)-u(x',-y_n)|^p}{[|x'-y'|^2+(x_n-y_n)^2]^\lambda}dy_n$$

$$=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}dx'\int_{\mathbf{R}^{n-1}}dy'\int_0^\infty dx_n\int_0^\infty\frac{|u(x)-u(y)|^p}{[|x'-y'|^2+(x_n+y_n)^2]^\lambda}dy_n$$

$$\leqslant\int_{\mathbf{R}^n_+}\int_{\mathbf{R}^n_+}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{2\lambda}}dxdy$$

[因为当 $x_n\geqslant0$ 且 $y_n\geqslant0$, $(x_n+y_n)^2\geqslant(x_n-y_n)^2$], 又类似的不等式对 I_{-+}和 I_{--}成立. 于是

$$\|Eu;\widetilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)\|\leqslant4^{1/p}\|u;\widetilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}^n_+)\|.$$

现设 Ω 是一致 C^1- 正则且带有界边界的区域. 则 4.6 节中的 bdry Ω 的开覆盖 $\{U_j\}$ 和相应的 U_j 到 $B=\{y\in\mathbf{R}^n:|y|<1\}$ 上的1-光滑映射族 $\{\Phi_j\}$ 是有限集, 比如, $1\leqslant j\leqslant N$. 还可假定集 U_j 有界. 设 U_0 是 Ω 的离开 bdry Ω 的有界开子集, 使 $\Omega\subset\bigcup_{j=0}^N U_j$. 令 $\{\omega_j\}_{j=0}^N$ 是对 Ω 的从属于 $\{U_j\}$ 的 C^∞-单位分解. 给定 $u\in L^p(\Omega)$, 令 u_j 由 $u_j(x)=\omega_j(x)u(x)$ 在 Ω 上 a.e. 定义. 显然 $u_j\in L^p(\Omega)$ 且 $\|u_j\|_{0,p,\Omega}\leqslant\|u\|_{0,p,\Omega}$. 若 $u\in\widetilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$, 则对 $1\leqslant j\leqslant N$

$$\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u_j(x)-u_j(y)|^p}{|x-y|^{2\lambda}}dxdy\leqslant K_1\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{2\lambda}}dxdy$$

$$+K_1\int_{\Omega\cap U_j}|u(y)|^pdy\int_{U_j}\frac{|\omega_j(x)-\omega_j(y)|^p}{|x-y|^{2\lambda}}dx.$$

因 U_j 有界, 由引理 5.47, 对 $y\in\Omega\cap U_j$ 我们有

$$\int_{U_j} \frac{|\omega_j(x)-\omega_j(y)|^p}{|x-y|^{2\lambda}}dx \leqslant K_2 \int_{U_j} |x-y|^{\nu p+1-n}dx \leqslant K_3,$$

而且 K_3 可选得不依赖于所包含的 j 的有限个值. 于是 $u_j \in \widetilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$ 且

$$\|u_j; \widetilde{T}^{\theta,p}(\Omega)\| \leqslant K_4 \|u; \widetilde{T}^{\theta,p}(\Omega)\|.$$

因为对所有不属于集 $\bigcup_{j=1}^{N} U_j$ 的点 $x \in \Omega$ 有 $\omega_0(x)=1$, 上述不等式对 u_0 亦成立.

对 $1 \leqslant j \leqslant N$, 令 v_j 在 $\mathbf{R}_+^n$ 上由

$$v_j(y) = \begin{cases} u_j \circ \boldsymbol{\Psi}_j(y) & \text{若 } y \in B \cap \mathbf{R}_+^n \\ 0 & \text{若 } y \in \mathbf{R}_+^n \sim B. \end{cases}$$

定义, 其中 $\boldsymbol{\Psi}_j = \boldsymbol{\Phi}_j^{-1}$, 则 $v_j \in \widetilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}_+^n)$. 事实上, 令 $y=\boldsymbol{\Phi}_j(x)$, $\eta = \boldsymbol{\Phi}_j(\xi)$, 我们有

$$\begin{aligned} \|v_j; \widetilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}_+^n)\|^p &= \int_{\mathbf{R}_+^n \cap B} |u_j(\boldsymbol{\Psi}_j(y))|^p dy \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}_+^n \cap B} \int_{\mathbf{R}_+^n \cap B} \frac{|u_j(\boldsymbol{\Psi}_j(y)) - u_j(\boldsymbol{\Psi}_j(\eta))|^p}{|y-\eta|^{2\lambda}} dy d\eta \\ &= \int_\Omega |u_j(x)|^p |\det \boldsymbol{\Phi}'_j(x)| dx \\ &\quad + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_j(x)-u_j(\xi)|^p}{|\boldsymbol{\Phi}_j(x)-\boldsymbol{\Phi}_j(\xi)|^{2\lambda}} |\det \boldsymbol{\Phi}'_j(x)| \\ &\quad \times |\det \boldsymbol{\Phi}'_j(\xi)| dx d\xi \\ &\leqslant K_5 \|u_j; \widetilde{T}^{\theta,p}(\Omega)\|^p, \end{aligned} \tag{36}$$

这是因为 $|\det \boldsymbol{\Phi}'_j|$ 有界, 并且 $\boldsymbol{\Psi}_j$ 在 B 上 1-光滑.

$$\begin{aligned} |x-\xi| = |\boldsymbol{\Psi}_j(y) - \boldsymbol{\Psi}_j(\eta)| &\leqslant K_6 |y-\eta| \\ &= K_6 |\boldsymbol{\Phi}_j(x) - \boldsymbol{\Phi}_j(\xi)|. \end{aligned}$$

今有 $Ev_j \in \widetilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)$, 并且

$$\|Ev_j; \widetilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)\| \leqslant K_7 \|v_j; \widetilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}_+^n)\|.$$

还有 $\operatorname{supp} Ev_j \subset\subset B$. 我们在 $\mathbf{R}^n$ 上由

$$w_j(x)=\begin{cases}Ev_j(\Phi_j(x)) & \text{若 } x\in U_j\\ 0 & \text{若 } x\in \mathbf{R}^n\sim U_j.\end{cases}$$

a. e. 定义 w_j. 则显然 $w_j(x)=u_j(x)$ a. e. 于 Ω, $\operatorname{supp} w_j\subset\subset U_j$, 且由导出(36)的类似的计算得

$$\|w_j(x);\widetilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)\|\leqslant K_8\|Ev_j;\widetilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)\|.$$

最后令

$$E^*u(x)=u_0(x)+\sum_{j=1}^{N}w_j(x).$$

显然 E^* 具有引理叙述中对 E 所要求的性质. ▌

应当注意, 在 4.29 节中对延拓定理 4.26 和 4.28 的减弱的假设所作的注释同样适用于上述引理.

7.46 推论 在引理 7.45 的条件下, 空间 $\widetilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$ 和 $T^{\theta,p}(\Omega)$ 重合, 并且它们的范数等价.

证明 两个空间的重合性从下述事实推出, 它们分别同相互重合的空间 $\widetilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)$ 和 $T^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)$ 中的函数在 Ω 上的限制重合. 若 $u\in\widetilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$ 且 E 是上述引理中的延拓算子, 我们有

$$\|u;T^{\theta,p}(\Omega)\|\leqslant\|Eu;T^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)\|\leqslant K_1\|Eu;\widetilde{T}^{\theta,p}(\mathbf{R}^n)\|$$
$$\leqslant K_2\|u;\widetilde{T}^{\theta,p}(\Omega)\|.$$

反向不等式由同样的方法推出, 只是代替 E 利用定理 4.6 (情形 $m=1$) 中构造的 1-延拓算子, 从定理 7.41 的证明可以看出, 它是一个对 $T^{\theta,p}(\Omega)$ 的延拓算子. ▌

7.47 对 $s\geqslant 0$, 令 $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ 是按 7.36 中构造 $W^{s,p}(\Omega)$ 的同样方式构造的空间, 只是代替 $T^{1-\theta,p}(\Omega)$ 而使用 $\widetilde{T}^{1-\theta,p}(\Omega)$. 由于推论 7.46, 我们证明了下述定理.

7.48 定理 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$, 或 $\mathbf{R}^n$ 中的一个半空间, 或 $\mathbf{R}^n$ 中一个一致 C^1-正则且有有界边界的区域. 则空间 $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ 和 $W^{s,p}(\Omega)$ 对每一 $s\geqslant 0$ 代数上和拓扑上重合. 特别若 $s=m+\sigma$, m 是整数,

$0<\sigma<1$，则由

$$\|u\|_{\tilde{s},p,\Omega}=\left\{\|u\|_{m,p,\Omega}^{p}+\sum_{|\alpha|=m}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{|D^{\alpha}u(x)-D^{\alpha}u(y)|^{p}}{|x-y|^{n+\sigma p}}dxdy\right\}^{1/p}$$

给的范数和 $W^{s,p}(\Omega)$ 上原来的范数 $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$ 等价.

7.49 附注 正是上面记为 $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ 的空间在文献中经常碰到，并常记为 $W^{s,p}(\Omega)$. 空间 $\widetilde{W}^{s,\infty}$ 显然可用类似的方式定义，它由范数

$$\|u\|_{s,\infty,\Omega}=\max\left(\|u\|_{m,\infty,\Omega},\max_{|\alpha|=m}\ \operatorname*{ess\ sup}_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|D^{\alpha}u(x)-D^{\alpha}u(y)|}{|x-y|^{\sigma}}\right)$$

有限的 $u\in W^{m,\infty}(\Omega)$ 组成.

嵌入定理

7.50 我们已经看到(例 7.34)，若 $1<p<\infty$，则线性映射

$$u\to\gamma u=(\gamma_0 u,\cdots,\gamma_{m-1}u);\ \gamma_j u=D_n^j u(\cdot,\cdots,\cdot,0)$$

建立了 $W^{m,p}(\mathbf{R}_+^n)/\ker\gamma$ 到 $\prod_{k=0}^{m-1}T^{m-k-1}(p,0;\Lambda;L^p(\mathbf{R}^{n-1}))$ 上的一个同构和同胚，其中 $\Lambda=(D_1,\cdots,D_{n-1})$. 因为 $D(\Lambda^k)=W^{k,p}(\mathbf{R}^{n-1})$ 且

$$T^0(p,0;\Lambda;L^p(\mathbf{R}^{n-1}))=T^{1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1}),$$

我们有 $\quad T^k(p,0;\Lambda;L^p(\mathbf{R}^{n-1}))=W^{k+1-1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1}).$

这样 γ 实际上是一个从 $W^{m,p}(\mathbf{R}_+^n)/\ker\gamma$ 到 $\prod_{k=0}^{m-1}W^{m-k-1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1})$ 上的一个同构和同胚. 特别，$W^{m,p}(\mathbf{R}_+^n)$ 中的函数在 $\mathbf{R}^{n-1}=\operatorname{bdry}\mathbf{R}_+^n$ 上的迹属于并构成整个空间 $W^{m-1/p,p}(\operatorname{bdry}\mathbf{R}_+^n)$. [这一现象有时描写为在边界上失去 $1/p$ 次导数.] 这一结果可以推广到边界光滑的区域.

7.51 若Ω是$\mathbf{R}^n$中的一个区域，它有一致C^m-正则性和有界边界，则 bdryΩ 的开覆盖$\{U_j\}$和相应的从 $B=\{y\in\mathbf{R}^n: |y|<1\}$到集$U_j$上的 m-光滑映射族$\{\overline{\Psi}_j\}$(参看 4.6 节)是有限族，比如 $1\leqslant j\leqslant r$. 若 $\{\omega_j\}$ 是从属 $\{U_j\}$ 的对 badyΩ 的单位分解，又若 u 是定义在 baryΩ的一个函数，我们在 $\mathbf{R}^{n-1}$ 上定义 $\theta_j u$ 如下:

$$\theta_j u(y')=\begin{cases}(\omega_j u)(\overline{\Psi}_j(y',0)) & 若|y'|<1\\ 0 & 其余,\end{cases}$$

其中 $y'=(y_1,\cdots,y_{n-1})$.

对 $s\geqslant 0$ 和 $1<p<\infty$，我们定义 $W^{s,p}(\text{bdry}\,\Omega)$是满足

$$\theta_j u\in W^{s,p}(\mathbf{R}^{n-1})\qquad(1\leqslant j\leqslant r)$$

的函数 $u\in L^p(\text{bdry}\,\Omega)$(见 5.21 节)的类. 空间 $W^{s,p}(\text{bdry}\,\Omega)$ 赋以范数

$$\|u\|_{s,p,\text{bdry}\,\Omega}=\left\{\sum_{j=1}^{r}\|\theta_j u\|_{s,p,\mathbf{R}^{n-1}}^{p}\right\}^{1/p}$$

是 Banach 空间.

乍看起来，如上定义的空间 $W^{s,p}(\text{bdry}\,\Omega)$依赖于定义中使用的特殊的覆盖$\{U_j\}$，映射$\{\overline{\Psi}_j\}$和单位分解$\{\omega_j\}$. 可以验证，对不同的族$\{\widetilde{U}_j\}$，$\{\widetilde{\Psi}_j\}$和$\{\widetilde{\omega}_j\}$，我们构造出的是带等价范数的同一空间.（我们略去细节，参看 Lions 和 Magenes[40].）同样可以推出 $C^\infty(\text{bdry}\,\Omega)$在 $W^{s,p}(\text{bdry}\,\Omega)$中稠密.

7.52 令 $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$[这种函数在 $W^{m,p}(\Omega)$上的限制在 $W^{m,p}(\Omega)$中稠密.]令 γ 表示线性映射

$$u\to\gamma u=(\gamma_0 u,\cdots,\gamma_{m-1}u),\ \gamma_j u=\left.\frac{\partial^j u}{\partial n^j}\right|_{\text{bdry}\,\Omega},\qquad(37)$$

这里 $\partial^j/\partial n^j$ 表示沿 bdryΩ外法向的j次方向导数. 利用对 bdryΩ一个邻域从属于开覆盖$\{U_j\}$的一个单位分解，我们可以证明 7.50 节结果的下列(到Ω)的推广.

7.53 定理 设$1<p<\infty$，又设Ω满足上面描述的条件．则由(37)给出的映射γ可连续延拓成一个从$W^{m,p}(\Omega)/\ker\gamma$到

$$\prod_{k=0}^{m-1} W^{m-k-1/p,p}(\mathrm{bdry}\,\Omega)$$

上的一个同构和同胚.

7.54 下述定理的一个直接推论是映射γ的核$\ker\gamma$，即满足$\gamma u=0$的$u\in W^{m,p}(\Omega)$全体，正好是空间$W_0^{m,p}(\Omega)$. 我们再一次采用7.30节的记号．令W_0^m表示W^m中在一个区间$[0,\varepsilon)$（$\varepsilon>0$可依赖f）为0的函数f的集合在$W^m=W^m(p,\gamma,A;B)$中的闭包.

7.55 定理 若$f\in W^m$且对$0\leqslant k\leqslant m-1$，$f^{(k)}(0)=0$，则$f\in W_0^m$. 这样$W_0^m$是从$W^m$到$\prod_{k=0}^{m-1}T^{m-k-1}$上的映射

$$f\to(f(0),f'(0),\cdots,f^{(m-1)}(0))$$

的核.

证明 设$f\in W^m$满足$f(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0$．令$\psi\in C^\infty(\mathbf{R})$满足：当$t\leqslant1$ $\psi(t)=0$，当$t\geqslant2$ $\psi(t)=1$，$0\leqslant\psi(t)\leqslant1$且对所有$t$，$0\leqslant k\leqslant m$，$|\psi^{(k)}(t)|\leqslant K_1$．令$f_n(t)=\psi(nt)f(t)$．显然$f_n\in W_0^m$. 我们必须证明，当$n\to\infty$，$f(t)-f_n(t)=(1-\psi(nt))f(t)\to0$（在$W^m$），即必须证明对每一$k$，$0\leqslant k\leqslant m$，每一重指标$\alpha$，$|\alpha|\leqslant m-k$，我们有当$n\to\infty$

$$\int_0^\infty t^{\nu p}\|A^\alpha(f-f_n)^{(k)}(t)\|_B^p dt\to0.$$

因$f\in W^m$，当$n\to\infty$有

$$\int_0^\infty t^{\nu p}\|(1-\psi(nt))A^\alpha f^{(k)}(t)\|_B^p dt\leqslant\int_0^{2/n}t^{\nu p}\|A^\alpha f^{(k)}(t)\|_B^p dt\to0.$$

因此我们仅需指出若$1\leqslant j\leqslant k$，则当$n\to\infty$

$$\int_0^\infty t^{\nu p}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^j(1-\psi(nt))\right]^p\left\|A^\alpha f^{(k-j)}(t)\right\|_B^p dt\to0.\qquad(38)$$

但(38)左端不超过

$$n^{jp}\int_{1/n}^{2/n} t^{\nu p}\left\|\Lambda^{a} f^{(k-j)}(t)\right\|_{B}^{p} dt \tag{39}$$

的常数倍. 因为 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0$ 及 $k-j\leqslant m-1$, 我们有(其中 $p^{-1}+(p')^{-1}=1$)

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda^{a} f^{(k-j)}(t)\right\|_{B}^{p} &\leqslant\left\{\frac{1}{(j-1)!}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{j-1}\left\|\Lambda^{a} f^{(k)}(\tau)\right\|_{B} d\tau\right\}^{p} \\ &\leqslant \frac{t^{(j-1)p}}{[(j-1)!]^{p}}\int_{0}^{t}\tau^{\nu p}\left\|\Lambda^{a} f^{(k)}(\tau)\right\|_{B}^{p} d\tau \\ &\quad\times\left\{\int_{0}^{t}\tau^{-\nu p'} d\tau\right\}^{p/p'} \\ &\leqslant K_{2} t^{jp-\nu p-1}\int_{0}^{t}\tau^{\nu p}\left\|\Lambda^{a} f^{(k)}(\tau)\right\|_{B}^{p} d\tau.\end{aligned}$$

由此推出(39)不超过下式的常数倍:

$$\begin{aligned}n^{jp}\int_{1/n}^{2/n} t^{jp-1} dt\int_{0}^{t}\tau^{\nu p}\left\|\Lambda^{a} f^{(k)}(\tau)\right\|_{B}^{p} d\tau &\leqslant(2^{jp}/jp) \\ \times\int_{0}^{2/n}\tau^{\nu p}\left\|\Lambda^{a} f^{(k)}(\tau)\right\|_{B}^{p} d\tau &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

这是因为 $f\in W^{m}$. ■

7.56 $W^{m,p}(\Omega)$中的函数在 bdryΩ上的迹的表征在对定义在Ω上的微分算子的非齐次边值问题的研究中有重要的应用. 定理 7.53 在下述意义下包含了对$W^{m,p}(\Omega)$的"正"和"反"两方面的嵌入定理: 若 $u\in W^{m,p}(\Omega)$, 则迹 $v=u|_{\mathrm{bdry}\,\Omega}$ 属于 $W^{m-1/p,p}(\mathrm{bdry}\,\Omega)$ 且

$$\|v\|_{m-1/p,p,\mathrm{bdry}\,\Omega}\leqslant K_{1}\|u\|_{m,p,\Omega};$$

反之, 若 $v\in W^{m-1/p,p}(\mathrm{bdry}\,\Omega)$, 则存在 $u\in W^{m,p}(\Omega)$满足

$$v=u|_{\mathrm{bdry}\,\Omega}$$

且

$$\|u\|_{m,p,\Omega}\leqslant K_{2}\|U\|_{m-1/p,p,\mathrm{bdry}\,\Omega}.$$

在开始介绍对空间 $W^{s,p}(\Omega)$的非常一般的嵌入定理之前, 我

们指出如何从对整数 s 的情形的嵌入定理和内插定理 7.17 获得一些(但非全部)对这些空间的嵌入.

7.57 定理 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个具有锥性质的区域，设 $s>0$ 且 $1<p<n$.

(a) 若 $n>sp$, 则当 $p\leqslant r\leqslant np/(n-sp)$, $W^{s,p}(\Omega)\to L^r(\Omega)$.

(b) 若 $n=sp$, 则当 $p\leqslant r<\infty$, $W^{s,p}(\Omega)\to L^r(\Omega)$.

(c) 若 $n<(s-j)p$, j 为某一非负整数, 则 $W^{s,p}(\Omega)\to C_B^j(\Omega)$.

证明 结论对整数 s 业已证明，我们可设 s 不是一个整数而 $s=m+\sigma$, m 是一个整数而 $0<\sigma<1$. 首先设 $m=0$, 则

$$
\begin{aligned}
W^{\sigma,p}(\Omega) &= L^p(\Omega)\cap T^{1-\sigma,p}(\Omega)\\
&= L^p(\Omega)\cap T(p,1-\sigma-(1/p);W^{1,p}(\Omega),L^p(\Omega)).
\end{aligned}
$$

今等同算子从 $W^{1,p}(\Omega)$ 到 $L^{np/(n-p)}$ 和从 $L^p(\Omega)$ 到 $L^p(\Omega)$ (明显地) 连续. 由定理 7.17, 它从 $T(p,1-\sigma-(1/p);W^{1,p}(\Omega);L^p(\Omega))$ 到 $T(p,1-\sigma-(1/p);L^{np/(n-p)}(\Omega),L^p(\Omega))$ 亦连续. 由定理 7.20 只要 $n>\sigma p$, 后者嵌入 $L^{np/(n-\sigma p)}$. 因此

$$W^{\sigma,p}(\Omega)\to L^{np/(n-\sigma p)}(\Omega).$$

对一般的 m, 我们推证如下. 设 $u\in W^{m+\sigma,p}(\Omega)$. 若 $|\alpha|=m$, 则 $D^\alpha u\in W^{\sigma,p}(\Omega)\to L^{np/(n-\sigma p)}(\Omega)$. 若 $|\alpha|\leqslant m-1$, 则 $D^\alpha u\in W^{1,p}(\Omega)\to L^{np/(n-\sigma p)}$. 因此 $W^{m+\sigma,p}\to W^{m,np/(n-\sigma p)}(\Omega)$. 若 $n>sp$, 由定理 5.4, 我们有 $W^{m,np/(n-\sigma p)}(\Omega)\to L^{np/(n-sp)}(\Omega)$, 因此(a)得证. 若 $n=sp$, 则对任何满足 $p\leqslant r<\infty$ 的 r, $W^{m,np/(n-\sigma p)}(\Omega)\to L^r(\Omega)$, 于是 (b) 得证. 若 $(s-j)p>n$, 则 $(m-j)np/(n-\sigma p)>n$, 从而 $W^{m,np/(n-\sigma p)}\to C_B^j(\Omega)$, 而(c)得证. ▌

上述定理中限制 $p<n$ 是不自然的, 加上它仅仅是为了得到一个非常简单的证明.

下述定理含有上面引入的所有嵌入结果作为特殊情形. 它包括了几位作者所得到的结果，特别是 Besov[9, 10], Uspenskii

[67,68]和 Lizorkin[41]的结果. 定理对 $\mathbf{R}^n$ 陈述，但显然可以推广到充分正则的区域，例如满足定理 7.41 的条件的区域. 我们不打算给任何证明.

7.58 定理 设 $s>0, 1<p\leqslant q<\infty$，$1\leqslant k\leqslant n$. 令 $\chi=s-(n/p)+(k/q)$.

若

(i) $\chi\geqslant 0$ 且 $p<q$，或

(ii) $\chi>0$ 且 χ 不是整数，或

(iii) $\chi\geqslant 0$ 且 $1<p\leqslant 2$，

则(正嵌入定理)

$$W^{s,p}(\mathbf{R}^n)\to W^{\chi,q}(\mathbf{R}^k). \tag{40}$$

嵌入(40)当 $p=q>2$ 且 χ 为非负整数未必成立. (特别，一般不可能加强定理 5.4 的部分 I 的情形 A 到允许 $k=n-mp$.)

反之，若 $p=q$ 且若

(iv) $\chi=s-(n-k)/p>0$ χ 不是整数，或

(v) $\chi\geqslant 0$ 且 $p\geqslant 2$，

则我们有逆嵌入

$$W^{\chi,p}(\mathbf{R}^k)\to W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$$

其意义是每一 $u\in W^{\chi,p}(\mathbf{R}^k)$ 是一个函数 $w\in W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 在 $\mathbf{R}^k$ 上的迹(即 $u=w|_{\mathbf{R}^k}$)，且满足

$$\|w\|_{s,p,\mathbf{R}^n}\leqslant K\|u\|_{\chi,p,\mathbf{R}^k},$$

k 不依赖于 u. (迹应理解为 5.2 节的意义.)

Bessel 位势——空间 $L^{s,p}(\Omega)$

7.59 我们将不加证明而概述构造分数次空间的另一方法，它起源于由 Aronszajn 和 Smith[7](及他们的合作者——Adams 等人[5]和 Aronszajn 等人[81])作的 Bessel 位势的研究. 这一方法

为 Calderón[13]和 Lions 与 Magenes[40]所介绍．所得空间记为 $L^{s,p}(\Omega)$(Lions 与 Magenes 记为 $H^{s,p}(\Omega)$，但不要同 7.73 节将定义的 Nikol'skii 的 H-空间混淆.）对整数 s(若 $1<p<\infty$)和所有 s(当 $p=2$)它同空间 $W^{s,p}(\Omega)$重合.

空间 $L^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 直接通过适度广义函数的 Fourier 变换定义，然后指出对整数 s 和 $1<p<\infty$，$L^{s,p}(\mathbf{R}^n)$和 $W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$同构且同胚．对满足 $s_1\leqslant s\leqslant s_2$ 的 s，空间 $L^{s,p}(\mathbf{R}^n)$可以等同于由复内插法内插于 $L^{s_1,p}(\mathbf{R}^n)$和 $L^{s_2,p}(\mathbf{R}^n)$之间的一个中间空间（见 Calderón [15]或 Lions[36]），复内插法不同于前面描述的 Lions 的迹方法. 然而复内插法提供一个方法对 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 把 $L^{s,p}(\Omega)$ 定义成形如 $W^{m,p}(\Omega)$(m 为整数)的空间的中间空间.

空间 $L^{s,p}(\Omega)$讨论中断言的证明，以及它们同空间 $W^{s,p}(\Omega)$的关系可在上面提到的 Calderón，Lions，及 Lions 和 Magenes 的文章中找到.

7.60 首先我们引进适度广义函数的概念．我们用 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$表示 $\mathbf{R}^n$ 上速减函数空间，所谓函数 ϕ 速减，是指它使

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|x^\alpha D^\beta\phi(x)|<\infty$$

对所有重指标 α 和 β 成立．空间 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$赋以由下述收敛概念表征的局部凸拓扑：若对所有 α 和 β

$$\lim_{j\to\infty}x^\alpha D^\beta\phi_j(x)=0(\text{在 }\mathbf{R}^n\text{ 上一致}),$$

则说序列$\{\phi_j\}$在 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$中收敛到 0．很易验证 Fourier 变换

$$\mathscr{F}\phi(y)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n}e^{-ix\cdot y}\phi(x)dx$$

和逆 Fourier 变换

$$\mathscr{F}^{-1}\phi(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}}e^{ix\cdot y}\phi(y)dy$$

都从 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$到 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$连续，并且因为 $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\phi=\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}\phi=\phi$,

它们事实上是 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 到 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 上的同构和同胚.

显然，由 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 的定义，$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)\to\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. 因此对偶空间 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 由这样的广义函数 $T\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 组成，它具有到 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 上的连续延拓. 例如，若 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 且 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，则

$$T_f(\phi)=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\phi(x)dx$$

定义 $T_f\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，这一事实对任何在无穷远"缓增"的函数 f 都成立，即这样的函数 f，对某一有限的 k，$|f(x)|\leqslant\text{const}|x|^k$ a. e. 在无穷远点的某个邻域内成立. $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 中的元素因此称为适度广义函数. $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 赋以作为 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 的对偶的弱-星拓扑，它连同这一拓扑是一个局部凸拓扑向量空间.

正的和逆的 Fourier 变换由

$$\mathscr{F}T(\phi)=T(\mathscr{F}\phi),\mathscr{F}^{-1}(T(\phi))=T(\mathscr{F}^{-1}\phi)$$

推广到 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$. 两者都是从 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 到 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 上的同构和同胚，并且 $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}T=\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}T=T$.

7.61 给定一个 $\mathbf{R}^n$ 上的适度广义函数和一个复数 z，u 的 z 次 Bessel 位势用 J^zu 表示并定义为

$$J^zu=\mathscr{F}^{-1}((1+|\cdot|^2)^{-z/2}\mathscr{F}u).$$

显然 J^z 是从 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 到 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 内的一个一一对应. 若 $\operatorname{Re}z>0$ 且 $1\leqslant p<\infty$，或若 $\operatorname{Re}z\geqslant0$ 且 $1<p<\infty$，则 J^z 连续变换 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 到 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 内，而 $D^\alpha J^{z+|\alpha|}$ 亦然.

7.62 对实数 s 和 $1\leqslant p\leqslant\infty$，令 $L^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 表示 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 在线性映射 J^s 之下的值域. 这样对每一 s，$L^{s,p}(\mathbf{R}^n)\to\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 且对 $s\geqslant0$，$L^{s,p}(\mathbf{R}^n)\to L^p(\mathbf{R}^n)$ 成立. 若 $u\in L^{s,p}(\mathbf{R}^n)$，则存在唯一的 $\tilde{u}\in L^p(\mathbf{R}^n)$，$u=J^s\tilde{u}$，我们定义

$$\|u;L^{s,p}(\mathbf{R}^n)\|=\|\tilde{u}\|_{0,p,\mathbf{R}^n}.$$

赋以这个范数，$L^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 是一个 Banach 空间. 我们综述它的一

些性质.

7.63 定理 (a) 若 $s\geqslant 0$ 且 $1\leqslant p<\infty$，则 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 在 $L^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 中稠密.

(b) 若 $1<p<\infty$ 且 $p'=p/(p-1)$，则 $[L^{s,p}(\mathbf{R}^n)]'\cong L^{-s,p'}(\mathbf{R}^n)$.

(c) 若 $t<s$, 则 $L^{s,p}(\mathbf{R}^n)\to L^{t,p}(\mathbf{R}^n)$.

(d) 若 $t\leqslant s$ 且或 $1<p<q\leqslant np/[n-(s-t)p]<\infty$ 或 $p=1$ 且 $1\leqslant q<n/(n-s+t)$, 则 $L^{s,p}(\mathbf{R}^n)\to L^{t,q}(\mathbf{R}^n)$.

(e) 若 $0\leqslant\mu\leqslant s-(n/p)<1$, 则 $L^{s,p}(\mathbf{R}^n)\to C^{0,\mu}(\mathbf{R}^n)$.

(f) 若 s 是非负整数, $1<p<\infty$, 则 $L^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 同 $W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 重合, 两空间的范数等价, 若 $p=2$ 这一结论对任何 s 成立.

(g) 若 $1<p<\infty$ 且 $\varepsilon>0$, 则对任何 s 我们有

$$L^{s+\varepsilon,p}(\mathbf{R}^n)\to W^{s,p}(\mathbf{R}^n)\to L^{s-\varepsilon,p}(\mathbf{R}^n).$$

7.64 现在我们叙述 Calderón[15]和 Lions[36]的复内插法，空间 $L^{s,p}(\mathbf{R}^n)$可由此产生.

设 B_0 和 B_1 是 Banach 空间，二者都象 7.11 节中一样嵌入一个拓扑向量空间 X, 空间 B_0+B_1 象在该节那样定义. 用$F(B_0,B_1)$表示复变量 $z=\sigma+i\tau$ 的取值在 B_0+B_1 内的函数 f 的空间，f 满足下述条件

(i) f 在带形 $0<\sigma<1$ 内全纯,

(ii) f 在带形 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 内连续且有界,

(iii) 对 $\tau\in\mathbf{R}$, $f(i\tau)\in B_0$, 映射 $\tau\to f(i\tau)$从 $\mathbf{R}$ 到 B_0 内连续, 且 $\lim\limits_{|\tau|\to\infty}f(i\tau)=0$.

(iv) 对 $\tau\in\mathbf{R}$, $f(1+i\tau)\in B_1$, 映射 $\tau\to f(1+i\tau)$ 从 $\mathbf{R}$ 到 B_1内连续, 且 $\lim\limits_{|\tau|\to\infty}f(1+i\tau)=0$.

$F(B_0,B_1)$赋以范数

$$\|f:F(B_0,B_1)\|=\max\left\{\sup_{\tau\in\mathbf{R}}\|f(i\tau)\|_{B_0},\ \sup_{\tau\in\mathbf{R}}\|f(1+i\tau)\|_{B_1}\right\}$$

是一个 Banach 空间.

对 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 令

$$\begin{aligned}B_\sigma&=[B_0;B_1]_\sigma\\&=\{u\in B_0+B_1:\text{对某一 } f\in F(B_0,B_1),\ u=f(\sigma)\}.\end{aligned}$$

B_σ 赋以范数

$$\|u\|_{B\sigma}=\|u;[B_0;B_1]_\sigma\|=\inf_{\substack{f\in F(B_0,B_1)\\ f(\sigma)=u}}\|f;F(B_0,B_1)\|$$

是一个嵌入 B_0+B_1 内的 Banach 空间.

中间空间 B_σ 具有类似于 Lions 的迹空间的内插特征. 若 C_0, C_1 和 Y 有类似于 B_0, B_1 和 X 的性质, L 是从 B_0+B_1 到 C_0+C_1 内的线性映射, 满足

$$\|Lu\|_{C_0}\leqslant k_0\|u\|_{B_0},\quad \|Lu\|_{C_1}\leqslant k_1\|u\|_{B_1},$$

则对任一 $u\in B_\sigma$ 有 $Lu\in C_\sigma$ 且

$$\|Lu\|\leqslant K_0^{1-\sigma}K_1^\sigma\|u\|_{B_0}.$$

下列定理可以在 Calderón 或 Lions 的文章[15][36]中找到.

7.65 定理 对任何实的 s_0 和 s_1, $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, 我们有

$$[L^{s_0,p}(\mathbf{R}^n);L^{s_1,p}(\mathbf{R}^n)]_\sigma=L^{(1-\sigma)s_0+\sigma s_1,p}(\mathbf{R}^n)$$

我们注意对由迹内插得到的$W^{s_0,p}(\mathbf{R}^n)$和$W^{s_1,p}(\mathbf{R}^n)$间的中间空间的相应陈述并非对所有的 s_0 和 s_1 都有效, 尽管对某些值, 特别是若 s_0, s_1 是相邻的整数, 它是有效的.

7.66 上述定理暗示如何对任意区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 定义空间 $L^{s,p}(\Omega)$.

若 $s\geqslant 0$, m 是满足 $s\leqslant m<s+1$ 的整数, 定义

$$L^{s,p}(\Omega)=[W^{m,p}(\Omega);L^p(\Omega)]_{(m-s)/m}.$$

若 Ω 充分正则, 以致具有强 m-延拓算子, 则由内插推理表明:

$L^{s,p}(\Omega)$同 $L^{s,p}(\mathbf{R}^n)$中的函数在Ω上的限制的空间重合. 只要 $0\leqslant s_0$, $s_1\leqslant m$, 定理 7.65 对空间 $L^{s,p}(\Omega)$. 亦有效.

对 s 的负值,空间 $L^{s,p}(\Omega)$的定义可按与 $W^{s,p}(\Omega)$ 同样的方式引进. 用 $L_0^{s,p}(\Omega)(s>0)$表示$\mathscr{D}(\Omega)$在 $L^{s,p}(\Omega)$ 中的闭包, 对 $1<p<\infty$, $s<0$, 定义空间$L^{s,p}(\Omega)$为$[L_0^{-s,p'}]'$,其中$(1/p)+(1/p')=1$.

只要Ω适当正则,$L^{s,p}(\Omega)$具有定理 7.63 对 $L^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 陈述的所有性质.

其它分数次空间

7.67 对空间 $W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 的一般嵌入定理的某些缺陷(参看定理 7.58) 导致 Besov[9.10]构造空间族 $B^{s,p}(\mathbf{R}^n)$, 当 s 是正整数时它异于 $W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$,当 s 是正整数,它自然地补充了 $W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$, 其意义后面将明确.

对 $s>0$ 和 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $B^{s,p}(\mathbf{R}^n)$定义如下. 令 $s=m+\sigma$, m 是非负整数, $0<\sigma\leqslant 1$, 空间 $B^{s,p}(\mathbf{R}^n)$由 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 中这样的 u 组成: 对它, 下面定义的范数$\|u;B^{s,p}(\mathbf{R}^n)\|$有限. 若 $1\leqslant p<\infty$,

$$\|u;B^{s,p}(\mathbf{R}^n)\|$$
$$=\Big\{\|u\|_{m,p,\mathbf{R}^n}^p$$
$$+\sum_{|\alpha|=m}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|D^\alpha u(x)-2D^\alpha u((x+y)/2)+D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}dxdy\Big\}^{1/p}.$$

若 $p=\infty$,

$$\|u;B^{s,\infty}(\mathbf{R}^n)\|=\max\Big\{\|u\|_{m,\infty\mathbf{R}^n},$$
$$\max_{|\alpha|=m}\ \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{x,y\in\mathbf{R}^n\\x\neq y}}\frac{|D^\alpha u(x)-2D^\alpha u((x+y)/2)+D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\alpha}\Big\},$$

$B^{s,p}(\mathbf{R}^n)$赋以上面的范数是 Banach 空间. 若 $1 \leqslant p < \infty$, $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 在 $B^{s,p}(\mathbf{R}^n)$中稠密.

7.68 引理 若 $1 \leqslant p < \infty$, $s > 0$ 是非整数, 则空间 $W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$和 $B^{s,p}(\mathbf{R}^n)$重合, 且有等价范数.

证明 对定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数我们由

$$\Delta_z u(x) = u(x+z) - u(x)$$

定义差分算子. 二阶差分算子 Δ_z^2 定义为

$$\Delta_z^2 u(x) = \Delta_z \Delta_z u(x) = u(x+2z) - 2u(x+z) + u(x).$$

等式

$$\Delta_z u = (1/2^k)\Delta_{2^k z} u - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}(1/2^j)\Delta_{2^j z}^2 u \tag{41}$$

容易由展开右端的和来验证.

显然$B^{s,p}(\mathbf{R}^n)$中函数 u 的范数等价于

$$\left\{\|u\|_{m,p,\mathbf{R}^n}^p + \sum_{|\alpha|=m}\int_{\mathbf{R}^n}|z|^{-n-\sigma p}dz\int_{\mathbf{R}^n}|\Delta_z^2 D^\alpha u(x)|^p dx\right\}^{1/p}, \tag{42}$$

而由定理 7.48, $W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$中 u 的范数可以表示成如下形式:

$$\left\{\|u\|_{m,p,\mathbf{R}^n}^p + \sum_{|\alpha|=m}\int_{\mathbf{R}^n}|z|^{-n-\sigma p}dz\int_{\mathbf{R}^n}|\Delta_z D^\alpha u(x)|^p dx\right\}^{1/p}, \tag{43}$$

显然, (42)被(43)的常数倍界住, 我们必须再证明反面的断言.

因此设 $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 利用(41), 我们有

$$\begin{aligned}
&\left\{\int_{\mathbf{R}^n}|z|^{-n-\sigma p}dz\int_{\mathbf{R}^n}|\Delta_z D^\alpha u(x)|^p dx\right\}^{1/p} \\
&\leqslant (1/2^k)\left\{\int_{\mathbf{R}^n}|z|^{-n-\sigma p}dz\int_{\mathbf{R}^n}|\Delta_{2^k z} D^\alpha u(x)|^p dx\right\}^{1/p} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}(1/2^j)\left\{\int_{\mathbf{R}^n}|z|^{-n-\sigma p}dz\int_{\mathbf{R}^n}|\Delta_{2^j z}^2 D^\alpha u(x)|^p dx\right\}^{1/p} \\
&= (1/2^{k(1-\sigma)})\left\{\int_{\mathbf{R}^n}|\rho|^{-n-\sigma p}d\rho\int_{\mathbf{R}^n}|\Delta_\rho D^\alpha u(x)|^p dx\right\}^{1/p}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k-1}(1/2^{j(1-\sigma)})\left\{\int_{\mathbf{R}^n}|\rho|^{-n-\sigma p}d\rho\int_{\mathbf{R}^n}|\Delta_\rho^z D^\alpha u(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

(在第一个积分中作了替换 $\rho=2^k z$，在第二个令 $\rho=2^j z$.) 因为 s 是非整数，我们有 $\sigma<1$，因此 k 可取得充分大使 $k(1-\sigma)>1$. 尔后推出(43)被(42)的常数倍界住. 因 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 在 $B^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 中稠密，引理得证. ∎

7.69 若 s 是整数而 $p=2$，空间 $W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 和 $B^{s,2}(\mathbf{R}^n)$ 重合. 对 $p\neq 2$，s 是整数，它们相异，但对任 $\varepsilon>0$，我们有

$$W^{s+\varepsilon,p}(\mathbf{R}^n)\to B^{s,p}(\mathbf{R}^n)\to W^{s,p}(\mathbf{R}^n)\quad 若\ 1<p\leqslant 2$$

$$B^{s+\varepsilon,p}(\mathbf{R}^n)\to W^{s,p}(\mathbf{R}^n)\to B^{s,p}(\mathbf{R}^n)\quad 若\ p\geqslant 2.$$

人们对空间 $B^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 有兴趣在于它的嵌入特征. 它对嵌入是“封闭系统”，同时填补了空间 $W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 嵌入系统的空隙.

7.70 定理 设 $s>0, 1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty, 1\leqslant k\leqslant n$，$k$ 是整数. 设

$$r=s-(n/p)+(k/q)>0$$

则

$$B^{s,p}(\mathbf{R}^n)\to B^{r,q}(\mathbf{R}^k).$$

反之，若 $p=q$，$r=[sp-(n-k)]/p>0$，则逆嵌入

$$B^{r,p}(\mathbf{R}^k)\to B^{s,p}(\mathbf{R}^n)$$

成立，即每一元素 $u\in B^{r,p}(\mathbf{R}^k)$ 是某一元素 $v\in B^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 的迹 $u=v|_{\mathbf{R}^k}$，且满足

$$\|v;B^{s,p}(\mathbf{R}^n)\|\leqslant K\|u;B^{r,p}(\mathbf{R}^k)\|,$$

K 不依赖于 u.

7.71 定理 若 $s>0, 1\leqslant p\leqslant\infty, 1\leqslant k\leqslant n,\ r=[sp-(n-k)]/p$，则

$$W^{s,p}(\mathbf{R}^n)\to B^{r,p}(\mathbf{R}^k)$$

且反之

$$B^{r,p}(\mathbf{R}^k)\to W^{s,p}(\mathbf{R}^n).$$

7.72 上面的定义和定理可以推广到适当的区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 和包含在 $\overline{\Omega}$ 中的 k 维光滑流形 Ω^k. 对 $1\leqslant p<\infty$, $B^{s,p}(\Omega)$ 中的范数是

$$\|u;B^{s,p}(\Omega)\|=\Big\{\|u\|_{m,p,\Omega}^p$$

$$+\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega\int_{\Omega_x}\frac{|D^\alpha u(x)-2D^\alpha u((x+y)/2)+D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}dydx\Big\}^{1/p}$$

其中 $\Omega_x=\{y\in\Omega;(x+y)/2\in\Omega\}$.

7.73 具有类似于 Besov 空间嵌入性质的另一空间是 Nikol'skii [49—51]引进的空间 $H^{s,p}(\Omega)$. 具有按 $L^p(\Omega)$ 度量的 Hölder 条件的范数的这些空间，其研究早于(分数次)W-或 B-空间并且推动了后两者的发展.

我们再一次令 $s=m+\sigma$, $m\geqslant0$ 是整数, $0<\sigma\leqslant1$, 对 $1\leqslant p<\infty$ 和 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, 函数 u 只要范数

$$\|u;H^{s,p}(\Omega)\|=\Big\{\|u\|_{0,p,\Omega}^p$$

$$+\sum_{|\alpha|=m}\sup_{\substack{h\in\mathbf{R}^n\\ \eta>0\\ 0<|h|<\eta}}\int_{\Omega_\eta}\frac{|\Delta_h^2D^\alpha u(x)|^p}{|h|^{\sigma p}}dx\Big\}^{1/p}$$

是有限的，则 u 属于 $H^{s,p}(\Omega)$，其中 $\Omega_\eta=\{x\in\Omega;\operatorname{dist}(x,\ \operatorname{bdry}\Omega)\geqslant2\eta\}$. 对 $p=\infty$ 的情况要作明显的修改，且事实上 $H^{s,\infty}(\Omega)=B^{s,\infty}(\Omega)$. 类似于引理 7.68 的推理表明若 s 是非整数，则 $H^{s,p}(\Omega)$ 的范数中的二阶差分 Δ^2 可以用一阶差分 Δ 代替，而不改变空间.

空间 $H^{s,p}(\Omega)$ 大于对应空间 $W^{s,p}(\Omega)$，但若 $\varepsilon>0$，我们有

$$H^{s+\varepsilon,p}(\Omega)\to W^{s,p}(\Omega)\to H^{s,p}(\Omega).$$

空间 $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 跟 Besov 空间一样具有嵌入的封闭系统，即定理 7.70 中的 B 处处可代之以 H 而成立. 强延拓定理可以对光滑有界区域上的 H-空间证明，于是嵌入定理可以推广到这类区域和在其内的光滑流形上的迹.

对空间 $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$和 $B^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 的嵌入定理可借助这类空间中的函数用多复变量指数型整函数逼近的技术来证明(例如,可参看 Nikol'skii[49]).

7.74 或者为空间本身或者为推进分析中其它问题的解决，人们对上述空间作了为数众多的推广. 我们指出两个方面的推广. 其一在于用加权范数代替通常的 L^p 范数. 其二在于在用沿不同坐标方向的积分定义范数时使用不同的 s,p 值(各向异性空间). 有兴趣的读者可参考两篇优秀的综述文章(Nikol'skii, [52], Sobolev 和 Nikol'skii[64]) 及其中的关于多实变量可微函数空间的全貌的进一步知识的文献.

第八章 Orlicz空间和Orlicz-Sobolev 空间

引 言

8.1 在这最后一章我们介绍一些涉及空间 $L^p(\Omega)$代以更一般的空间 $L_A(\Omega)$的新近结果，这里通常由凸函数 t^p 扮演的角色由更一般的凸函数 $A(t)$ 承担. 空间 $L_A(\Omega)$ 称为 Orlicz 空间，它在 Krasnosel'skii 和 Rutickii 的文献 [34] 和 Luxemburg 的博士论文[42]中得到深入的研究，读者可以参考它们当中的任何一个，以便了解下面概述的材料的更完全的发展. 上述文献还包含 Orlicz 空间对非线分析中一些问题应用的例子.

依照 Krasnosel'skii 和 Rutickii[34]，我们使用"N-函数"类中的函数 A 来定义 Orlicz 空间，这个类不如Luxemburg[42] 使用的 Yourg 函数类广阔(还可参看 O'Neill[55])；例如，它从 Orlicz 空间中排除了 $L^1(\Omega)$和 $L^\infty(\Omega)$，但 N-函数便于处理并对我们的目的是足够的，仅在定理8.35的证明中，必须援引更一般的Young 函数;

若在 Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$的定义中 $L^p(\Omega)$扮演的角色用 Orlicz 空间 $L_A(\Omega)$ 代替，所得的空间记为 $W^mL_A(\Omega)$ 并称为 Orlicz-Sobolev空间，Sobolev 空间的许多性质主要地由 Donaldson 和 Trudinger [22] 推广到 Orlicz-Sobolev 空间. 本章我们介绍一些这类结果.

指出 Sobolev 嵌入定理 5.4 中的一个空隙可以由考虑 Orlicz 空间而被填补也多少有些兴趣，明确说来，该定理情形 B 对 $\mathbf{R}^n$ 内

“正则”区域Ω上的 $W^{m,p}(\Omega)$当 $mp=n$ 的嵌入没有提供“最好的”目标空间. 我们对 $p\leqslant q<\infty$有 $W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$, 但 $W^{m,p}(\Omega)\not\to L^\infty(\Omega)$. 在定理 8.25 中构造了一个 $W^{m,p}(\Omega)$到一个 Orlicz 空间的最佳嵌入. 这个结果属于 Trudinger[66].

N-函数

8.2 设 a 是定义在$[0,\infty)$上具有下列性质的实值函数;

(*a*) $a(0)=0$, 当 $t>0, a(t)>0$. $\lim\limits_{t\to\infty}a(t)=\infty$;

(*b*) a 非减,即 $s>t\geqslant 0$ 蕴涵 $a(s)\geqslant a(t)$;

(c) a 右连续,即若 $t\geqslant 0$, 则 $\lim\limits_{s\to t+}a(s)=a(t)$

则由下式定义的$[0,\infty)$上的实值函数

$$A(t)=\int_0^t a(\tau)d\tau \tag{1}$$

称为N-函数.

不难验证任何这样的N-函数 A 具有下列性质:

(i) A 在$[0,\infty)$连续;

(ii) A 严格增加,即 $s>t\geqslant 0$ 蕴涵 $A(s)>A(t)$;

(iii) A 是凸的,即若 $s,t\geqslant 0$ 且 $0<\lambda<1$ 则

$$A(\lambda s+(1-\lambda)t)\leqslant\lambda A(s)+(1-\lambda)A(t);$$

(iv) $\lim\limits_{t\to 0+}A(t)/t=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}A(t)/t=\infty$;

(v) 若 $s>t>0$, 则 $A(s)/s>A(t)/t$.

性质(i), (iii)和(iv)可被用来定义 N-函数, 因为由它们可推出 A 通过具有性质(*a*)—(*c*)的 a 的形如(1)的表达式的存在性.

下面是N-函数的例子:

$A(t)=t^p$, $1<p<\infty$,

$A(t)=e^t-t-1$,

$$A(t)=e^{(t^p)}-1,\ 1<p<\infty,$$

$$A(t)=(1+t)\log(1+t)-t.$$

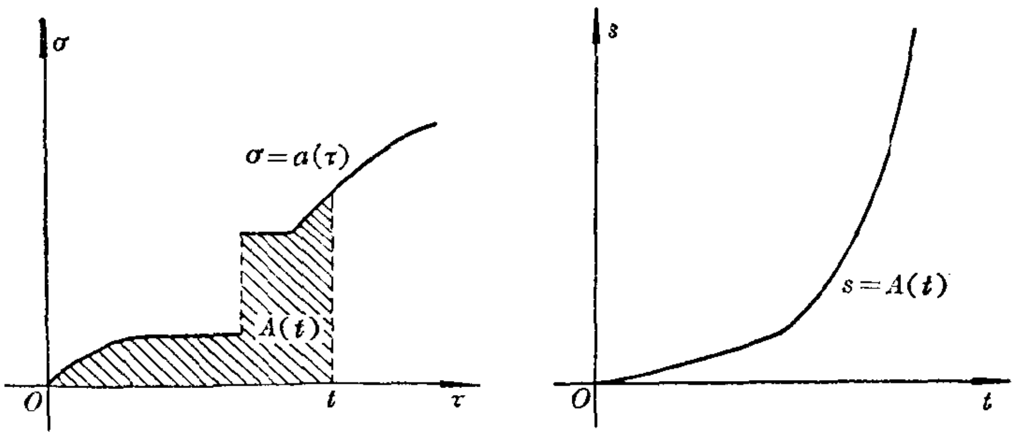


图 8

显然 $A(t)$用图形 $\sigma=a(\tau)$下由 $\tau=0$ 到 $\tau=t$ 的面积表示(图 8). A 的图形中的直线段对应 a 的常数区间，而 A的图形的角点对应 a 的图形的不连续(即垂直跳跃)点.

8.3 给定满足(a)—(c)的 a, 我们定义

$$\tilde{a}(s)=\sup_{a(t)\leqslant s} t. \tag{2}$$

不难验证这样定义的 $\tilde{a}$ 也满足(a)—(c)并且 a 可由 $\tilde{a}$ 依照

$$a(t)=\sup_{\tilde{a}(s)\leqslant t} s \tag{3}$$

来复原(若 a 严格增加,则$\tilde{a}=a^{-1}$). 由

$$A(t)=\int_0^t a(\tau)d\tau,\ \widetilde{A}(s)=\int_0^s \tilde{a}(\sigma)d\sigma \tag{4}$$

给定的 N-函数 A 和 $\widetilde{A}$ 称为互补的；每一个称为另一个的补(N-函数).

下面是互补对的例子：

$$A(t)=t^p/p,\ \widetilde{A}(s)=s^{p'}/p' \quad 1<p<\infty,$$

$$(1/p)+(1/p')=1;$$

$$A(t)=e^t-t-1,\ \widetilde{A}(s)=(1+s)\log(1+s)-s.$$

$\widetilde{A}(s)$用图形 $\sigma=a(\tau)$ [或更正确地说 $\tau=\tilde{a}(\sigma)$] 左边从 $\sigma=0$

到 $\sigma=s$ 的面积表示，见图 9，显然我们有

$$st\leqslant A(t)+\widetilde{A}(s), \tag{5}$$

(5)称为 Young 不等式，当且仅当 $t=\tilde{a}(s)$ 或 $s=a(t)$ 时(5)中等号成立，把(5)写成形式

$$\widetilde{A}(s)\geqslant st-A(t),$$

并且注意当 $t=\tilde{a}(s)$ 时出现等号，我们有

$$\widetilde{A}(s)=\max_{t\geqslant 0}(st-A(t)).$$

这个关系可用作 A 的补 N-函数 $\widetilde{A}$ 的定义.

因为 A 和 $\widetilde{A}$ 严格增加，它们有反函数且(5)蕴涵对任意 $t\geqslant 0$

$$A^{-1}(t)\widetilde{A}^{-1}(t)\leqslant A(A^{-1}(t))+\widetilde{A}(\widetilde{A}^{-1}(t))=2t.$$

另外，$A(t)\leqslant ta(t)$，再考虑图 9，对 $t>0$ 我们有

$$\widetilde{A}(A(t)/t)<(A(t)/t)t=A(t). \tag{6}$$

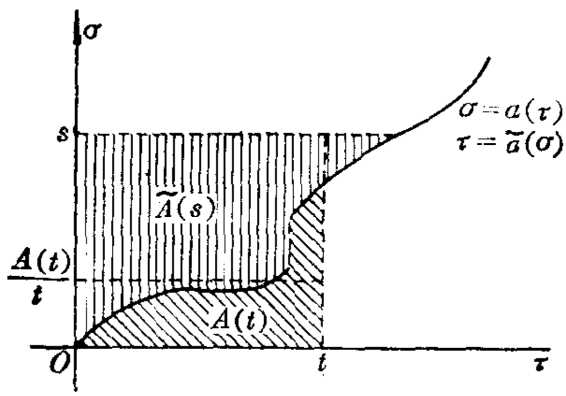


图 9

(6)中 $A(t)$ 代以 t，我们得

$$\widetilde{A}(t/A^{-1}(t))<t.$$

因此，对任意 $t>0$ 我们有

$$t<A^{-1}(t)\widetilde{A}^{-1}(t)\leqslant 2t. \tag{7}$$

8.4 我们将需要 N-函数之间的一些偏序关系，若 A 和 B 是两个 N-函数，我们说 B 全局控制 A，只要存在一个正常数 k 使

$$A(t)\leqslant B(kt) \tag{8}$$

对所有 $t\geqslant 0$ 成立. 类似地说 B 在无穷远控制 A, 若存在正常数 k 和 t_0 使(8) 对所有 $t\geqslant t_0$ 成立. 两个 N-函数 A 和 B 称为是全局(或在无穷远附近)等价的, 若其中每一个全局(或在无穷远附近)控制另一个, 即 A 和 B 在无穷远附近等价, 当且仅当存在两个正常数 k_1, k_2 和 t_0 使若 $t\geqslant t_0$, 则 $B(k_1 t)\leqslant A(t)\leqslant B(k_2 t)$. 若

$$0<\lim_{t\to\infty}\frac{B(t)}{A(t)}<\infty,$$

则必是这种情形.

若 A 和 B 分别有补 N-函数 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$, 则 B 全局(或在无穷远附近)控制 A, 当且仅当 $\widetilde{A}$ 全局(或在无穷远附近)控制 $\widetilde{B}$. 类似地, A 和 B 等价当且仅当 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$ 等价.

8.5 若 B 在无穷远附近控制 A, 而 A 和 B 不是在无穷远附近等价的, 则说 A 本质上在无穷远附近增加慢于 B. 当且仅当对每一 $k>0$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A(kt)}{B(t)}=0 \tag{9}$$

会出现这种情形. 读者可以验证(9)等价于条件

$$\lim_{t\to\infty}\frac{B^{-1}(t)}{A^{-1}(t)}=0.$$

令 $1<p<\infty$. 此后我们用 A_p 表示 N-函数

$$A_p(t)=t^p/p,\quad 0\leqslant t<\infty. \tag{10}$$

若 $1<p<q<\infty$, 则 A_p 本质上在无穷远处附近慢于 A_q. 但 A_q 不全局控制 A_p.

8.6 一个 N-函数被说成满足全局 Δ_2-条件, 假若存在一个正常数 k 使对每一 $t>0$,

$$A(2t)\leqslant kA(t). \tag{11}$$

易见当且仅当对每一 $r>0$ 存在一个正常数 $k=k(r)$ 使对所有 $t\geqslant 0$

$$A(rt) \leqslant kA(t) \tag{12}$$

时(11)成立. 类似地,说 A 在无穷远附近满足 Δ_2-条件,假若存在 $t_0>0$ 使(11)[或等价地(12),对 $r>1$]当 $t \geqslant t_0$ 时成立. 显然 t_0 可用任何更小的正数 t_1 代替,因若 $t_1 \leqslant t \leqslant t_0$,则

$$A(rt) \leqslant [A(rt_0)/A(t_1)]A(t).$$

若 A 满足全局(或在无穷远附近)Δ_2-条件且若 B 全局(或在无穷远附近)等价于 A,则 B 亦满足 Δ_2-条件,显然 N-函数 $A_p(t)=t^p/p, 1<p<\infty$ 满足全局 Δ_2-条件. 可以验证,A 满足全局(或在无穷远附近)Δ_2-条件当且仅当存在一个有限常数 c 使

$$(1/c)ta(t) \leqslant A(t) \leqslant ta(t)$$

对所有 $t \geqslant 0$(或对所有 $t \geqslant t_0 > 0$)成立,其中 A 由(1)给定.

Orlicz 空间

8.7 设Ω是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域而 A 是一个 N-函数. Orlicz 类 $K_A(\Omega)$是所有定义在Ω上且满足

$$\int_\Omega A(|u(x)|)dx < \infty$$

的可测函数(的对Ω上 a.e. 相等关系等价类)u 的集合. 因 A 是凸的,$K_A(\Omega)$总是函数的凸集,但它未必是一个向量空间;例如可以存在 $u \in K_A(\Omega)$和 $\lambda>0$ 使 $\lambda u \notin K_A(\Omega)$.

我们称二元对(A, Ω) Δ-正则,假若

(a) A 满足全局 Δ_2-条件,或

(b) A 在无穷远附近满足 Δ_2-条件且Ω有有限体积.

8.8 引理 $K_A(\Omega)$是一个向量空间(对于逐点相加和数乘)当且仅当(A, Ω)是 Δ-正则的.

证明 因为 A 是凸的,我们有

(i) 只要 $u \in K_A(\Omega)$且 $|\lambda| \leqslant 1$, $\lambda u \in K_A(\Omega)$,

(ii) 若$u\in K_A(\Omega)$蕴涵对每一复数λ, $\lambda u\in K_A(\Omega)$, 则 $u, v\in K_A(\Omega)$蕴涵$u+v\in K_A(\Omega)$.

这就推出: 当且仅当若$u\in K_A(\Omega)$且$|\lambda|>1$蕴涵$\lambda u\in K_A(\Omega)$, $K_A(\Omega)$是一个向量空间

若A满足全局Δ_2-条件且$|\lambda|>1$, 则由 (12) 对$u\in K_A(\Omega)$我们有

$$\int_\Omega A(|\lambda u(x)|)dx\leqslant k(|\lambda|)\int_\Omega A(|u(x)|)dx<\infty.$$

类似的, 若A满足在无穷远附近的Δ_2-条件且$\mathrm{vol}\,\Omega<\infty$, 对$|\lambda|>1$, $u\in K_A(\Omega)$和某一$t_0>0$, 我们有

$$\int_\Omega A(|\lambda u(x)|)dx=\left(\int_{\{x:|u(x)|\geqslant t_0\}}+\int_{\{x:|u(x)|<t_0\}}\right)A(|\lambda u(x)|)dx$$
$$\leqslant k(|\lambda|)\int_\Omega A(|u(x)|)dx+A(|\lambda|t_0)\mathrm{vol}\,\Omega<\infty.$$

由此看出在两种情形$K_A(\Omega)$都是向量空间.

现设(A, Ω)不是Δ-正则的, 若$\mathrm{vol}\,\Omega<\infty$, 还设$t_0>0$给定. 存在正数序列$\{t_j\}$使

(i) $A(2t_j)\geqslant 2^jA(t_j)$, 且

(ii) 若$\mathrm{vol}\,\Omega<\infty$, $t_j\geqslant t_0>0$.

设$\{\Omega_j\}$是Ω的互不相交的可测子集序列使

$$\mathrm{vol}\,\Omega_j=\begin{cases}1/2^jA(t_j) & 若\ \mathrm{vol}\,\Omega=\infty\\ A(t_0)\mathrm{vol}\,\Omega/2^jA(t_j) & 若\ \mathrm{vol}\,\Omega<\infty.\end{cases}$$

令

$$u(x)=\begin{cases}t_j & 若\ x\in\Omega_j\\ 0 & 若\ x\in\Omega\sim\left(\bigcup_{j=1}^\infty\Omega_j\right).\end{cases}$$

则

$$\int_\Omega A(|u(x)|)dx=\sum_{j=1}^\infty A(t_j)\mathrm{vol}\,\Omega_j$$

$$=\begin{cases}1 & \text{若 } \mathrm{vol}\Omega=\infty \\ A(t_0)\mathrm{vol}\Omega & \text{若 } \mathrm{vol}\Omega<\infty.\end{cases}$$

但

$$\int_\Omega A(|2u(x)|)dx \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} 2^j A(t_j)\mathrm{vol}\Omega_j=\infty;$$

于是 $K_A(\Omega)$不是一个向量空间. ■

8.9 Orlicz 空间$L_A(\Omega)$被定义为 Orlicz 类 $K_A(\Omega)$的线性包，即包含 $K_A(\Omega)$的最小向量空间(关于逐点加法和数乘). 显然$L_A(\Omega)$由元素$u\in K_A(\Omega)$的所有数积 λu 组成. 于是 $K_A(\Omega)\subset L_A(\Omega)$; 当且仅当$(A,\Omega)\Delta$-正则，这两个集合相等.

读者可以验证泛函

$$\|u\|_A=\|u\|_{A,\Omega}=\inf\left\{k>0:\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)dx\leqslant 1\right\} \tag{13}$$

是 $L_A(\Omega)$ 上的一个范数. (这个范数 由 Luxemburg[42] 引进.) 对$\|u\|_A>0$, (13)中的下确界可以达到; 事实上，在不等式

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)dx\leqslant 1 \tag{14}$$

中令 k 减少趋于$\|u\|_A$, 由单调收敛定理我们得

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_A}\right)dx\leqslant 1. \tag{15}$$

(15)中的等号可能不成立，但若(14)的等号成立，则 $k=\|u\|_A$.

8.10 定理 $L_A(\Omega)$赋以范数(13)是 Banach 空间.

完备性的证明十分类似于在定理 2.10 中给的空间 $L^p(\Omega)$完备性的证明，细节留给读者. [我们注意若 $1<p<\infty$ 且 A_p 由(10)给出，则

$$L^p(\Omega)=L_{A_p}(\Omega)=K_{A_p}(\Omega).$$

并且$\|u\|_{A_p}\Omega=p^{-1/p}\|u\|_{p,\Omega}$.]

8.11 若 A 和 $\widetilde{A}$ 是互补N-函数, Hölder 不等式的一个推广

$$\left|\int_{\Omega} u(x)v(x)dx\right| \leqslant 2\|u\|_{A,\Omega}\|v\|_{\tilde{A},\Omega} \tag{16}$$

可应用 Young 不等式(5)于$|u(x)|/\|u\|_A$和$|v(x)|/\|v\|_{\tilde{A}}$并在 Ω上积分而得到.

下述对 Orlicz 空间的初等嵌入定理与引理 2.8 相应的结果类似.

8.12 定理 当且仅当

(*a*) B 全局控制 A, 或

(*b*) B 在无穷远附近控制A且 $\mathrm{vol}\,\Omega<\infty$, 嵌入 $L_B(\Omega)\to L_A(\Omega)$成立.

证明 若 $A(t)\leqslant B(kt)$对所有 $t\geqslant 0$ 成立且若 $u\in L_B(\Omega)$; 则

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u(x)|}{k\|u\|_B}\right)dx \leqslant \int_{\Omega} B\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_B}\right)dx \leqslant 1.$$

于是 $u\in L_A(\Omega)$且$\|u\|_A\leqslant k\|u\|_B$.

若 $\mathrm{vol}\,\Omega<\infty$, 令 $t_1=A^{-1}((2\mathrm{vol}\Omega)^{-1})$. 若$B$在无穷远附近控制 A, 则存在正数 t_0 和 k 使对 $t\geqslant t_0$ 有 $A(t)\leqslant B(kt)$. 显然当 $t\geqslant t_1$ 有

$$A(t)\leqslant K_1B(kt),$$

其中 $K_1=\max(1, A(t_0)/B(kt_1))$. 若给定 $u\in L_B(\Omega)$, 令$\Omega'(u)=\{x\in\Omega: |u(x)/2K_1k\|u\|_B<t_1\}$, $\Omega''(u)=\Omega\sim\Omega'(u)$, 则

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} A\left(\frac{|u(x)|}{2K_1k\|u\|_B}\right)dx &= \left(\int_{\Omega'(u)}+\int_{\Omega''(u)}\right)A\left(\frac{|u(x)|}{2K_1k\|u\|_B}\right)dx\\ &\leqslant \frac{1}{2\mathrm{vol}\Omega}\int_{\Omega'(u)}dx+K_1\int_{\Omega''(u)}B\left(\frac{|u(x)|}{2K_1\|u\|_B}\right)dx\\ &\leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_{\Omega}B\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_B}\right)dx\leqslant 1.\end{aligned}$$

于是 $u\in L_A(\Omega)$, 且$\|u\|_A\leqslant 2kK_1\|u\|_B$.

反之, 设无论是(*a*)还是(*b*)都不成立, 则存在点 $t_j>0$ 使

$$A(t_j)\geqslant B(jt_j),\ j=1, 2, \cdots.$$

当 $\text{vol}\Omega<\infty$，我们可设

$$t_j\geq(1/j)B^{-1}(1/\text{vol}\Omega).$$

令 Ω_j 是Ω的体积为 $1/B(jt_j)$ 的子区域，令

$$u_j(x)=\begin{cases}jt_j & \text{若 } x\in\Omega_j\\ 0 & \text{若 } x\in\Omega\sim\Omega_j.\end{cases}$$

则

$$\int_\Omega A(|u_j(x)|/j)dx\geq\int_\Omega B(|u_j(x)|)dx=1.$$

于是$\|u_j\|_B=1$ 但$\|u_j\|_A\geq j$，这说明 $L_B(\Omega)$不嵌入 $L_A(\Omega)$. ▌

8.13 我们说 $L_A(\Omega)$中的函数序列 u_j 平均收敛到 $u\in L_A(\Omega)$，若

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega A(|u_j(x)-u(x)|)dx=0.$$

A 的凸性蕴涵对 $0<\varepsilon\leq1$ 有

$$\int_\Omega A(|u_j(x)-u(x)|)dx\leq\varepsilon\int_\Omega A(|u_j(x)-u(x)|/\varepsilon)dx,$$

由此显然 $L_A(\Omega)$中的依范数收敛蕴涵平均收敛. 当且仅当二元对(A,Ω)是 Δ-正则时，其逆成立，即平均收敛蕴涵依范数收敛. 证明与引理 8.8 的类似，将其留给读者.

8.14 用 $E_A(\Omega)$ 表示Ω上有界且支集在$\overline{\Omega}$有界的函数 u 的空间在 $L_A(\Omega)$内的闭包，若 $u\in K_A(\Omega)$，则由

$$u_j(x)=\begin{cases}u(x) & \text{当}|u(x)|\leq j \quad \text{且}|x|\leq j, x\in\Omega\\ 0 & \text{其余}\end{cases}\tag{17}$$

定义的序列 $\{u_j\}$ 在 Ω a.e. 收敛. 因为 $A(|u(x)-u_j(x)|)\leq A(|u(x)|)$，由控制收敛定理 u_j 在 $L_A(\Omega)$中平均收敛到 u 因此若(A,Ω) 是 Δ-正则的，则 $E_A(\Omega)=K_A(\Omega)=L_A(\Omega)$若$(A,\Omega)$不是 Δ-正则的，我们有

$$E_A(\Omega)\subset K_A(\Omega)\subsetneqq L_A(\Omega),\tag{18}$$

于是在这种情形 $E_A(\Omega)$是 $L_A(\Omega)$的一个真闭子空间，为验证(18)

中第一个包含关系，令 $u\in E_A(\Omega)$ 给定，取有界且支集有界的函数 v 满足 $\|u-v\|_A<\frac{1}{2}$，利用 A 的凸性和(15)式，我们得

$$\frac{1}{\|2u-2v\|_A}\int_\Omega A(|2u(x)-2v(x)|)dx$$

$$\leqslant\int_\Omega A\left(\frac{|2u(x)-2v(x)|}{\|2u-2v\|_A}\right)dx\leqslant 1$$

因此 $2u-2v\in K_A(\Omega)$. 因为 $2v$ 显然属于 $K_A(\Omega)$ 而 $K_A(\Omega)$ 是凸集，我们有 $u=\frac{1}{2}(2u-2v)+\frac{1}{2}(2v)$ 属于 $K_A(\Omega)$.

8.15 引理 $E_A(\Omega)$ 是 $K_A(\Omega)$ 的最大线性子空间.

证明 设 S 是 $K_A(\Omega)$ 的线性子空间而令 $u\in S$. 则对任何数 λ，$\lambda u\in K_A(\Omega)$. 若 $\varepsilon>0$ 而 u_j 由(17)式给定，则前节已指出 u_j/ε 在 $L_A(\Omega)$ 中平均收敛到 u/ε，因此对充分大的 j，

$$\int_\Omega A(|u_j(x)-u(x)|/\varepsilon)dx\leqslant 1,$$

从而 u_j 在 $L_A(\Omega)$ 中收敛到 u，于是 $S\subset E_A(\Omega)$. ∎

8.16 定理 设 Ω 有有限体积，又设 N-函数 A 在无穷远附近增加本质上慢于 B，则

$$L_B(\Omega)\to E_A(\Omega).$$

证明 因为 $L_B(\Omega)\to L_A(\Omega)$ 业已建立，我们只需指出 $L_B(\Omega)\subset E_A(\Omega)$. 因为 $L_B(\Omega)$ 是 $K_B(\Omega)$ 的线性包而 $E_A(\Omega)$ 是 $K_A(\Omega)$ 的最大线性子空间，只需指出每当 $u\in K_B(\Omega)$ 和 λ 是一个数，就有 $\lambda u\in K_A(\Omega)$. 但存在一个正数 t_0 使 $A(|\lambda|t)\leqslant B(t)$ 对所有 $t\geqslant t_0$ 成立，于是

$$\int_\Omega A(|\lambda u(x)|)dx=\left\{\int_{\{x:|u(x)|\leqslant t_0\}}+\int_{\{x:|u(x)|>t_0\}}\right\}$$

$$\times A(|\lambda u(x)|)dx\leqslant A(|\lambda|t_0)\operatorname{vol}\Omega+\int_\Omega B(|u(x)|)dx<\infty,$$

因此定理得证. ▌

Orlicz 空间中的对偶

8.17 引理 对固定的 $v\in L_{\widetilde{A}}(\Omega)$, 由

$$L_v(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx \tag{19}$$

定义的线性泛函属于$[L_A(\Omega)]'$. 用 $\|L_v\|$ 表示它在该空间中的范数, 我们有

$$\|v\|_{\widetilde{A}}\leqslant\|L_v\|\leqslant 2\|v\|_{\widetilde{A}}. \tag{20}$$

证明 由 Hölder 不等式(16)推出若 $u\in L_A(\Omega)$, 则

$$|L_v(u)|\leqslant 2\|u\|_A\|v\|_{\widetilde{A}}.$$

从而 L_v 在 $L_A(\Omega)$ 上有界且(20)中第二个不等式成立.

为建立第一个不等式可设在 $L_{\widetilde{A}}(\Omega)$ 中 $v\neq 0$, 即$\|L_v\|=K>0$. 令

$$u(x)=\begin{cases}\widetilde{A}\left(\dfrac{|v(x)|}{K}\right)\Big/\dfrac{v(x)}{K} & 当\quad v(x)\neq 0\\ 0 & 当\quad v(x)=0.\end{cases}$$

若$\|u\|_A>1$, 则对充分小的 $\varepsilon>0$ 我们有

$$\frac{1}{\|u\|_A-\varepsilon}\int_\Omega A(|u(x)|)dx\geqslant\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_A-\varepsilon}\right)>1.$$

令 $\varepsilon\to 0^+$, 利用不等式(6)我们得

$$\|u\|_A\leqslant\int_\Omega A(|u(x)|)dx=\int_\Omega A\left(\widetilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{K}\right)\Big/\frac{|v(x)|}{K}\right)dx$$

$$<\int_\Omega\widetilde{A}\left(\frac{v(x)}{K}\right)dx=\frac{1}{\|L_v\|}\int_\Omega u(x)v(x)dx\leqslant\|u\|_A.$$

这一矛盾表明$\|u\|_A\leqslant 1$. 今有

$$\|L_v\|=\sup_{\|u\|_A\leqslant 1}|L_v(u)|\geqslant\|L_v\|\left|\int_\Omega\widetilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{\|L_v\|}\right)dx\right|,$$

于是

$$\int_\Omega \widetilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{\|L_v\|}\right)dx\leqslant 1. \tag{21}$$

即得$\|v\|_{\widetilde{A}}\leqslant\|L_v\|$. ∎

我们注意当 L_v 限制作用在 $E_A(\Omega)$时引理仍成立. 此时为得到(20)中的第一个不等式，取$\|L_v\|$是 L_v 在 $[E_A(\Omega)]'$ 中的范数，上述证明中的 u 代以 $\chi_n u$，χ_n 是 $\Omega_n=\{x\in\Omega:|x|\leqslant n$ 且$|u(x)|\leqslant n\}$的特征函数. 显然 $\chi_n u$ 属于 $E_A(\Omega)$，$\|\chi_n u\|_A\leqslant 1$ 而(21)变为

$$\int_\Omega \chi_n(x)\widetilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{\|L_v\|}\right)dx\leqslant 1.$$

因为 χ_n 在 Ω a.e. 增加收敛到 1，由单调收敛定理得

$$\int_\Omega \widetilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{\|L_v\|}\right)dx\leqslant 1,$$

于是又得$\|v\|_{\widetilde{A}}\leqslant\|L_v\|$.

8.18 定理 $E_A(\Omega)$的对偶空间$[E_A(\Omega)]'$同构且同胚于 $L_{\widetilde{A}}(\Omega)$.

证明 我们已经指出每一元素 $v\in L_{\widetilde{A}}(\Omega)$ 由 (19) 式确定既在 $L_A(\Omega)$上又在 $E_A(\Omega)$上的一个有界线性泛函，两种情形下其范数和$\|v\|_{\widetilde{A}}$至多相差因子2. 余下要指出的是 $E_A(\Omega)$ 上每一有界线性泛函对某一 $v\in L_{\widetilde{A}}(\Omega)$有形式 L_v.

设 $L\in[E_A(\Omega)]'$ 给定. 我们由

$$\lambda(S)=L(\chi_S)$$

在有有限体积的 Ω 的可测子集上定义一个复测度 λ，其中 χ_S 是 S 的特征函数；因为

$$\int_\Omega A(|\chi_S(x)|A^{-1}(1/\mathrm{vol}S))dx=\int_S(1/\mathrm{vol}S)dx=1, \tag{22}$$

我们有

$$|\lambda(S)|\leqslant\|L\|\|\chi_S\|_A=\|L\|[1/A^{-1}(1/\mathrm{vol}S)].$$

因为右端随 vol$S$ 趋于零，测度 λ 对于 Lebesgue 测度绝对连续，

由 Radon-Nikodym 定理 1.47，λ 可表成形式

$$\lambda(S)=\int_S v(x)dx,$$

其中 v 在 Ω 上可积，于是

$$L(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx$$

对可测简单函数 u 成立.

设 $u\in E_A(\Omega)$，可找到 a.e. 收敛到 u 的可测简单函数列 u_j 在 Ω 满足 $|u_j(x)|\leqslant|u(x)|$. 因为 $|u_j(x)v(x)|$ a.e. 收敛到 $|u(x)v(x)|$，由 Fatou 引理 1.44 得

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right|\leqslant\sup_j\int_\Omega|u_j(x)v(x)|dx$$
$$=\sup_j|L(|u_j|\operatorname{sgn}v)|\leqslant\|L\|\sup_j\|u_j\|_A\leqslant\|L\|\|u\|_A.$$

故线性泛函

$$L_v(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx$$

在 $E_A(\Omega)$ 上有界，由引理 8.17 后的注释知 $v\in L_{\tilde{A}}(\Omega)$. 因为 L_v 和 L 在可测简单函数上取相同的值，它们组成一个在 $E_A(\Omega)$ 中稠密的集[见定理 8.20(a)的证明]，故两泛函在 $E_A(\Omega)$ 上重合而定理得证. ∎

Hahn-Banach 延拓定理的一个简单应用指出若 $E_A(\Omega)$ 是 $L_A(\Omega)$ 的一个真子空间[即，若 (A,Ω) 不是 Δ-正则]，则存在一个 $L_A(\Omega)$ 上的有界线性泛函对任何 $v\in L_{\tilde{A}}(\Omega)$ 不能由(19)给出，作为一个直接推论我们有

8.19 定理 当且仅当 $(A,\ \Omega)$ 和 $(\tilde{A},\ \Omega)$ 都 Δ-正则时 $L_A(\Omega)$ 自反.

我们略去 orlicz 空间一致凸性的任何讨论，这个题目在 Luxemburg 的论文[42]中讨论过.

可分性和紧性定理

下面我们推广逼近定理 2.13, 2.15 和 2.19.

8.20 定理 (a) $C_0(\Omega)$在 $E_A(\Omega)$中稠密

(b) $E_A(\Omega)$可分.

(c) 若 J_ε 是 2.17 节中引入的软化子, 则对任何 $u\in E_A(\Omega)$, 我们有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} J_\varepsilon * u = u$(在 $E_A(\Omega)$),

(d) C_0^∞ 在 $E_A(\Omega)$中稠密.

证明 (a)可用定理 2.13 中使用的同样方法证明. 首先用简单函数对 $u\in E_A(\Omega)$进行逼近时, 我们可以假设 u 在 Ω 有界且有有界支集. 这时, 为指出简单函数依 $E_A(\Omega)$中的范数收敛到 u, 而利用控制收敛推理是需要的(细节留给读者).

由在定理 2.15 中给的同样的证明可由 (a) 推出(b). 现考虑(c). 若 $u\in E_A(\Omega)$, 令 u 在 Ω 外为零而把 u 延拓到 $\mathbf{R}^n$. 令

$$v\in L_{\widetilde{A}}(\Omega),$$

则

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega (J_\varepsilon * u(x) - u(x))v(x)dx\right|\\ &\leqslant \int_{\mathbf{R}^n} J(y)dy \int_\Omega |u(x-\varepsilon y) - u(x)|\,|v(x)|dx\\ &\leqslant 2\|v\|_{\widetilde{A},\Omega}\int_{|y|\leqslant 1} J(y)\|u_{\varepsilon y} - u\|_{A,\Omega}dy,\end{aligned}$$

这里利用了 Hölder 不等式(16), 并令 $u_{\varepsilon y}(x) = u(x-\varepsilon y)$. 由(20)和定理 8.18

$$\begin{aligned}\|J_\varepsilon * u - u\|_{A,\Omega} &= \sup_{\|v\|_{\widetilde{A},\Omega}\leqslant 1}\left|\int_\Omega (J_\varepsilon * u(x) - u(x))v(x)dx\right|\\ &\leqslant 2\int_{|y|\leqslant 1} J(y)\|u_{\varepsilon y} - u\|_{A,\Omega}dy.\end{aligned}$$

给定 $\delta>0$，我们可找到 $\tilde{u}\in C_0(\Omega)$ 使 $\|u-\tilde{u}\|_{A,\Omega}<\delta/6$. 显然 $\|u_{\varepsilon y}-\tilde{u}_{\varepsilon y}\|_{A,\Omega}<\delta/6$，而对充分小的 ε，$\|\tilde{u}_{\varepsilon y}-\tilde{u}\|_{A,\Omega}<\delta/6$ 对任意 $y:|y|\leqslant 1$ 成立，于是 $\|J_\varepsilon * u-u\|_{A,\Omega}<\delta$ 而 (c) 被建立.

(d) 是 (a) 和 (c) 的直接推论. ▌

我们注意 $L_A(\Omega)$ 是不可分的，除非 $L_A(\Omega)=E_A(\Omega)$，即除非 $(A,\ \Omega)$ 是 Δ-正则的. 这个事实的一个证明可在 Krasnosel'skii 和 Rutickii 的著作中找到，[34，第 II 章，定理 10.2.]

8.21 一个可测函数序列 u_j 被说成在 Ω 上依测度收敛到函数 u，只要对任意 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$ 存在一个整数 M 使当 $j>M$ 有

$$\operatorname{vol}\{x\in\Omega:|u_j(x)-u(x)|>\varepsilon\}\leqslant\delta,$$

显然这时亦存在一个整数 N 使当 $j,k\geqslant N$ 则

$$\operatorname{vol}\{x\in\Omega:|u_j(x)-u_k(x)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\delta.$$

8.22 定理 设 Ω 的体积有限，又设 N-函数 B 在无穷远附近本质上增加比 A 更慢. 若序列 $\{u_j\}$ 在 $L_A(\Omega)$ 中有界并且在 Ω 上依测度收敛，则它在 $L_B(\Omega)$ 中收敛.

证明 固定 $\varepsilon>0$ 而令 $v_{j,k}(x)=[u_j(x)-u_k(x)]/\varepsilon$. 显然 $\{v_{j,k}\}$ 在 $L_A(\Omega)$ 中有界；比如设 $\|v_{j,k}\|_{A,\Omega}\leqslant K$. 令存在正数 t_0，使当 $t>t_0$ 有

$$B(t)\leqslant\frac{1}{4}A(t/K).$$

令 $\delta=1/4B(t_0)$，并令

$$\Omega_{j,k}=\{x\in\Omega:|v_{j,k}(x)|\geqslant B^{-1}(1/2\operatorname{vol}\Omega)\}.$$

因 $\{u_j\}$ 依测度收敛，存在一个整数 N 使当 $j,\ k\geqslant N$ 有 $\operatorname{vol}\Omega_{jk}\leqslant\delta$ 令

$$\Omega'_{j,k}=\{x\in\Omega_{j,k}:|v_{j,k}(x)|\geqslant t_0\},$$

$$\Omega''_{j,k}=\Omega_{j,k}\sim\Omega'_{j,k}.$$

对 $j,k\geqslant N$ 我们有

$$\int_\Omega B(|v_{j,k}(x)|)dx = \left(\int_{\Omega\sim\Omega_{j,k}} + \int_{\Omega'_{j,k}} + \int_{\Omega''_{j,k}}\right) B(|v_{j,k}(x)|)dx$$
$$\leqslant \frac{\mathrm{vol}\,\Omega}{2\mathrm{vol}\,\Omega} + \frac{1}{4}\int_{\Omega'_{j,k}} A\left(\frac{|v_{j,k}(x)|}{K}\right)dx + \delta B(t_0) \leqslant 1,$$

因此$\|u_j-u_k\|_{B,\Omega}\leqslant\varepsilon$，从而$\{u_j\}$在$L_B(\Omega)$中收敛. ▌

当我们希望推广 Rellich-Kondra chov 定理 6.2 到 Orlicz-Sobolev 空间的嵌入时将会用到下述定理:

8.23 定理 设Ω体积有限，又设N-函数B在无穷远附近本质上增加比A更慢，则$L_A(\Omega)$的任何有界子集S若在$L^1(\Omega)$中准紧，则它在$L_B(\Omega)$中亦准紧.

证明 因Ω体积有限，显然$L_A(\Omega)\to L^1(\Omega)$. 若$\{u_j^*\}$是$S$中的一个序列，它有子序列$\{u_j\}$在$L^1(\Omega)$中收敛；比如就是$u_j\to u$，在$L^1(\Omega)$中成立. 令$\varepsilon$，$\delta>0$，则存在一个整数$N$使当$j\geqslant N$有$\|u_j-u\|_{1,\Omega}\leqslant\varepsilon\delta$. 于是 $\mathrm{vol}\{x\in\Omega: |u_j(x)-u(x)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\delta$，于是$\{u_j\}$在$\Omega$上依测度收敛，因此也在$L_B(\Omega)$中收敛. ▌

Sobolev 嵌入定理的一个极限情形

8.24 若$mp=n$且$p>1$，Sobolev 嵌入定理 5.4 提供的不是$W^{m,p}(\Omega)$可以嵌入的最好(即最小的)目标空间. 事实上这时对适当正则的Ω有

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega) \qquad p\leqslant q<\infty,$$

但(见例 5.26)

$$W^{m,p}(\Omega)\not\subset L^\infty(\Omega).$$

若嵌入的目标空间扩大到包括 Orlicz 空间，则可找到最好的目标空间. 我们首先考虑有界区域Ω. 下列定理当$m=1$时的情形已被 Trudinger[66]建立.

8.25 定理 设Ω是$\mathbf{R}^n$中一个有锥性质的区域. 设$mp=n$且$p>1$. 令

$$A(t)=\exp[t^{n/(n-m)}]-1=\exp[t^{p/(p-1)}]-1. \tag{23}$$

则存在嵌入

$$W^{m,p}(\Omega)\to L_A(\Omega).$$

证明 设$x\in\Omega$, C是包含在Ω中顶点在x的一个有限锥. 设$u\in C^m(\bar{C})$. 对函数$f(t)=u(y+t(x-y))$应用Taylor公式

$$f(1)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}+\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1(1-t)^{m-1}f^{(m)}(t)dt,$$

并注意

$$f^{(j)}(t)=\sum_{|\alpha|=j}\frac{j!}{\alpha!}D^\alpha u(y+t(x-y))(x-y)^\alpha,$$

我们得

$$|u(x)|\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}\frac{1}{\alpha!}|D^\alpha u(y)||x-y|^{|\alpha|}$$

$$+\sum_{|\alpha|=m}\frac{m}{\alpha!}|x-y|^m\int_0^1(1-t)^{m-1}|D^\alpha u(y+t(x-y))|dt.$$

令V和h分别是C的体积和高. 用(ρ,θ)表示$y\in C$的原点在x的球面极坐标, 这样C用$0<\rho<h,\theta\in\Sigma$表示, 体积元dy写成形式$\rho^{n-1}\omega(\theta)d\rho d\theta$. 而

$$|u(x)|=\frac{1}{V}\int_C|u(x)|dy\leqslant\frac{1}{V}\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}\frac{h^{|\alpha|}}{\alpha!}\int_C|D^\alpha u(y)|dy$$

$$+\frac{1}{V}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m}{\alpha!}\int_\Sigma\omega(\theta)d\theta\int_0^h\rho^{n+m-1}d\rho$$

$$\times\int_0^1(1-t)^{m-1}|D^\alpha u((1-t)\rho,\theta)|dt$$

$$\leqslant K_1\Big\{\|u\|_{m-1,1,C}+\sum_{|\alpha|=m}\int_\Sigma\omega(\theta)d\theta\int_0^h\rho^{n-1}d\rho$$

$$\times\int_0^\rho \sigma^{m-1}|D^\alpha u(\sigma,\theta)|d\sigma\Big\}$$

$$=K_1\Big\{\|u\|_{m-1,1,C}+\sum_{|\alpha|=m}\int_\Sigma \omega(\theta)d\theta$$

$$\times\int_0^h \sigma^{m-1}|D^\alpha u(\sigma,\ \theta)|d\theta\int_0^h \rho^{n-1}d\rho\Big\}$$

$$\leqslant K_2\ \Big\{\|u\|_{m-1,1,C}+\ \sum_{|\alpha|=m}\int_C\frac{|D^\alpha u(z)|}{|z-x|^{n-m}}dz\Big\}.$$

由稠密性，上面的不等式对所有 $u\in W^{m,1}(C)$ 成立. 特别，对任何 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 和几乎所有的 $x\in\Omega$，我们有

$$|u(x)|\leqslant K_2\Big\{\|u\|_{m-1,1,\Omega}+\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega\frac{|D^\alpha u(y)|}{|x-y|^{n-m}}dy\Big\},$$

其中 K_2 依赖 m,n 和确定Ω的锥性质的锥高 h 和体积 V.

我们希望对任意 $s>1$ 估计 $\|u\|_{0,s}$. 相应地，若 $v\in L^{s'}(\Omega)$，$s'=s/(s-1)$，则

$$\int_\Omega|u(x)v(x)|dx\leqslant K_2\|u\|_{m-1,1}\int_\Omega|v(x)|dx$$

$$+K_2\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|D^\alpha u(y)|\,|v(x)|}{|x-y|^{n-m}}dydx$$

$$\leqslant K_2\|u\|_{m-1,1}\|v\|_{0,s'}(\mathrm{vol}\,\Omega)^{1/s}$$

$$+K_2\sum_{|\alpha|=m}\Big\{\int_\Omega\int_\Omega\frac{|v(x)|}{|x-y|^{n-(m/s)}}dydx\Big\}^{1-(1/p)}$$

$$\times\Big\{\int_\Omega\int_\Omega\frac{|D^\alpha u(y)|^p|v(x)|}{|x-y|^{(n-m)/s}}dydx\Big\}^{1/p}.$$

今由引理 5.47 我们有当 $0\leqslant\nu<n$ 则

$$\int_\Omega\frac{1}{|x-y|^\nu}dx\leqslant K_3(\nu,n)(\mathrm{vol}\,\Omega)^{1-(\nu/n)}.$$

事实上细察引理的证明知 $K_3(\nu,n)=K_4/(n-\nu)$，K_4 仅依赖于 n. 因此

$$\int_\Omega\int_\Omega\frac{|v(x)|}{|x-y|^{n-(m/s)}}dydx\leqslant K_4\frac{s}{m}(\mathrm{vol}\,\Omega)^{m/sn}\int_\Omega|v(x)|dx$$

$$\leqslant K_5 s(\mathrm{vol}\,\Omega)^{(1/sp)+(1/s)}\|v\|_{0,s'}.$$

又有

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|D^\alpha u(y)|^p |v(x)|}{|x-y|^{(n-m)/s}}dydx$$

$$\leqslant \int_\Omega |D^\alpha u(y)|^p dy\cdot\|v\|_{0,s'}\cdot\left\{\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-m}}dx\right\}^{1/s}$$

$$\leqslant \|D^\alpha u\|_{0,p}^p\|v\|_{0,s'}(K_5(\mathrm{vol}\,\Omega)^{1/p})^{1/s}.$$

因此

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx\leqslant K_2\|u\|_{m-1,1}\|v\|_{0,s'}(\mathrm{vol}\,\Omega)^{1/s}$$

$$+K_6\sum_{|\alpha|=m} s^{(p-1)/p}\|D^\alpha u\|_{0,p}\|v\|_{0,s'}(\mathrm{vol}\,\Omega)^{1/s}.$$

因为 $s^{(p-1)/p}>1$ 且 $W^{m-1,1}(\Omega)\to W^{m,p}(\Omega)$，于是

$$\|u\|_{0,s}=\sup_{v\in L^{s'}(\Omega)}\frac{\int_\Omega |u(x)v(x)|dx}{\|v\|_{0,s'}}$$

$$\leqslant K_7 s^{(p-1)/p}(\mathrm{vol}\,\Omega)^{1/s}\|u\|_{m,p},$$

常数 K_7 仅依赖于 m,n 和确定 Ω 的锥性质的锥. 令 $s=nk/(n-m)=pk/(p-1)$，我们得

$$\int_\Omega |u(x)|^{pk/(p-1)}dx\leqslant \mathrm{vol}\,\Omega\left\{\frac{pk}{p-1}\right\}^k\{K_7\|u\|_{m,p}\}^{pk/(p-1)}$$

$$=\mathrm{vol}\,\Omega\left\{\frac{k}{e^{p/(p-1)}}\right\}^k\left\{eK_7\left(\frac{p}{p-1}\right)^{(p-1)/p}\|u\|_{m,p}\right\}^{pk/(p-1)}.$$

因为 $e^{p/(p-1)}>e$，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k!)(k/e^{p(p-1)})^k$ 收敛到一个有限和 K_8. 令 $K_9=\max(1,K_8\,\mathrm{vol}\,\Omega)$ 且令

$$K_{10}=eK_9K_7[p/(p-1)]^{(p-1)/p}\|u\|_{m,p}=K_{11}\|u\|_{m,p}.$$

则注意到 $K_9\geqslant1$ 和 $pk/(p-1)>1$ 得

$$\int_\Omega\left(\frac{|u(x)|}{K_{10}}\right)^{pk/(p-1)}dx\leqslant\frac{\mathrm{vol}\,\Omega}{K_9^{pk/(p-1)}}\left(\frac{k}{e^{p/(p-1)}}\right)^k$$

$$<\frac{\operatorname{vol}\Omega}{K_9}\left(\frac{k}{e^{p/(p-1)}}\right)^k.$$

展开 $A(t)$成幂级数，我们得

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{K_{10}}\right)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_\Omega\left(\frac{|u(x)|}{K_{10}}\right)^{pk/(p-1)}dx$$

$$<\frac{\operatorname{vol}\Omega}{K_9}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{e^{p/(p-1)}}\right)^n\leqslant 1.$$

因此 $u\in L_A(\Omega)$且

$$\|u\|_A\leqslant K_{10}=K_{11}\|u\|_{m,p},$$

其中 K_{11} 依赖于 $n,m,\operatorname{vol}\Omega$和确定$\Omega$的锥性质的锥. ▌

上面的定理建立的嵌入在下述意义下是“最佳可能”的，即若存在一个形如

$$W_0^{m,p}(\Omega)\to L_B(\Omega)$$

的嵌入，则A在无穷远附近控制 B. 这一事实对情形$m=1$，$n=p>1$ 的证明可在 Hempel 等的注记[30] 中找到，一般情形留给读者作为练习.

定理 8.25 可推广到分数次空间. 对这方面的结果，读者可参考 Grisvard[28]和 Peetre[56].

8.26 若Ω无界(有锥性质)从而体积无穷，则由(23)给定的N-函数在零点可能减小得不够快，以致不能保证每一 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ $(mp=n)$是 $L_A(\Omega)$的成员. 设k_0是满足 $k_0\geqslant p-1$ 的最小整数并定义修改了的N-函数 A_0 如下:

$$A_0(t)=\exp(t^{p/(p-1)})-\sum_{j=0}^{k_0-1}(1/j!)t^{jp/(p-1)}.$$

显然 A_0 在无穷远附近等价于 A，于是对体积有限的任何区域Ω，$L_A(\Omega)$和 $L_{A_0}(\Omega)$ 重合且有等价的范数. 然而 A_0 尚具有进一步的性质，当 $0<r\leqslant 1$

$$A_0(rt)\leqslant r^{k_0p/(p-1)}A_0(t)\leqslant r^pA_0(t). \tag{24}$$

我们证明若 $mp=n$ 且 Ω 有锥性质(但可能无界)，则

$$W^{m,p}(\Omega)\to L_{A_0}(\Omega).$$

象在引理 5.14 的证明中所做的，我们可以写 Ω 成可数个子区域 Ω_j 之和，每一 Ω_j 有被某一不依赖于 j 的固定的锥确定的锥性质，存在某两个常数 K_1 和 K_2 使

$$0<K_1\leqslant \operatorname{vol}\Omega_j\leqslant K_2,$$

并且对某一正整数 R，任 $R+1$ 个子区域 Ω_j 的交集是空集. 由定理 8.25 推出若 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，则

$$\|u\|_{A_0,\Omega_j}\leqslant K_3\|u\|_{m,p,\Omega_j},$$

其中 K_3 不依赖于 j. 取 $r=R^{1/p}\|u\|_{m,p,\Omega_j}^{-1}\|u\|_{m,p,\Omega}$ 利用(24)并利用区域 Ω_j 的有限交性质，我们有

$$\int_\Omega A_0\left(\frac{|u(x)|}{R^{1/p}K_3\|u\|_{m,p,\Omega}}\right)dx\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Omega_j}A_0\left(\frac{|u(x)|}{R^{1/p}K_3\|u\|_{m,p,\Omega}}\right)dx$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\|u\|_{m,p,\Omega_j}^p}{R\|u\|_{m,p,\Omega}^p}\leqslant 1.$$

因此 $\|u\|_{A_0,\Omega}\leqslant R^{1/p}K_3\|u\|_{m,p,\Omega}$ 这就是所要证明的.

我们注意若 $k_0>p-1$，上述结果可稍许改进. 即 A_0 代以 N-函数 $\max(t^p,A_0(t))$.

Orlicz-Sobolev 空间

8.27 对 $\mathbf{R}^n$ 中一个给定的区域 Ω 和一个给定的 N-函数 A，Orlicz-Sobolev 空间 $W^mL_A(\Omega)$，由 $L_A(\Omega)$ 中的这些函数(的等价类) u 组成：对满足 $|\alpha|\leqslant m$ 的所有 α，它们的广义函数导数 $D^\alpha u$ 也属于 $L_A(\Omega)$. 类似地可定义空间 $W^mE_A(\Omega)$. 用与定理 3.2 的证明中所使用的同样的方法可以验证 $W^mL_A(\Omega)$ 赋以范数

$$\|u\|_{m,A}=\|u\|_{m,A,\Omega}=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|_{A,\Omega} \tag{25}$$

是一个 Banach 空间，并且 $W^mE_A(\Omega)$ 是 $W^mL_A(\Omega)$ 的一个闭子空

间从而对(25)也是一个 Banach 空间. 应当记住，当且仅当(A,Ω) Δ-正则时 $W^mE_A(\Omega)$和 $W^mL_A(\Omega)$重合. 若 $1<p<\infty$, $A_p(t)=t^p$ 则 $W^mL_{A_p}(\Omega)=W^mE_{A_p}(\Omega)=W^{m,p}(\Omega)$，后一空间的范数和前两个的等价.

象通常 Sobolev 空间的情形一样，$W_0^mL_A(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^mL_A(\Omega)$中的闭包. [对 $W_0^mE_A(\Omega)$，类似的定义显然在所有情形导致同一空间.]

Orlicz-Sobolev 空间的许多性质可由对普通 Sobolev 空间同样性质的证明的十分直接的推广得到. 在下述定理中我们总结其中的一些，至于证明方法读者可参阅第三章中对应的结果. 细节可以在 Donaldson 和 Trudinger 的文章[2]中找到.

8.28 定理 (*a*) $W^mE_A(\Omega)$是可分的(定理 3.5).

(*b*) 若(A,Ω)和$(\tilde{A},\Omega)$是Δ-正则的，则

$$W^mE_A(\Omega)=W^mL_A(\Omega)$$

是自反的(定理 3.5).

(*c*) 空间$[W^mE_A(\Omega)]'$ 中每一元素 L 由

$$L(u)=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega D^\alpha u(x)v_\alpha(x)dx$$

对某些函数 $v_\alpha\in L_{\tilde{A}}(\Omega)$, $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$，给出(定理 3.8).

(*d*) $C^\infty(\Omega)\cap W^mE_A(\Omega)$在 $W^mE_A(\Omega)$ 中稠密(定理 3.16).

(*e*) 若Ω有线段性质，则 $C^\infty(\overline{\Omega})$在 $W^mE_A(\Omega)$ 中稠密(定理 3.18).

(*f*) $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$在 $W^mE_A(\mathbf{R}^n)$中稠密. 于是

$$W_0^mL_A(\mathbf{R}^n)=W^mE_A(\mathbf{R}^n)$$

(定理 3.18).

Orlicz-Sobolev 空间的嵌入定理

8.29 与五、六两章中对空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 得到的类似的嵌入结果

对 Orlicz-Sobolev 空间 $W^mL_A(\Omega)$ 和 $W^mE_A(\Omega)$ 亦成立. 这方面的首批结果由 Dankert[20]和 Donaldson 得到. 跟定理 5.4 和 6.2 平行的一个相当一般的嵌入定理由 Donaldson 和 Trudinger [22]表述,下面我们就来叙述它.

象通常 Sobolev 空间的情形一样,大多数嵌入结果是对具有锥性质的区域得到的. 给出(广义) Hölder 连续性估计的嵌入是例外,这时需要强局部 Lipschitz 性质. 下面一些结果仅对有界区域得到. 当涉及到一般的 Orlicz 空间时,推广通常 Sobolev 空间的类似结果到无界区域所使用的方法(见引理 5.14)看来不能采用直接的方式. 在这个意义下嵌入的结果仍欠完备.

8.30 我们暂只涉及 $W^1L_A(\Omega)$ 的嵌入, $W^mL_A(\Omega)$ 的嵌入总结在定理 8.40 中. 下面 Ω 总理解为是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域.

设 A 是一个给定的 N-函数. 我们总假设

$$\int_0^1 \frac{A^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt<\infty, \tag{26}$$

若有必要, A 代以另一在无穷远附近等价的 N-函数以适合(26)[若 Ω 体积有限,从嵌入理论的观点看来,(26)对 A 不算什么限制,因为在无穷远附近等价的 N-函数确定相同的 Orlicz 空间.]

还假设

$$\int_1^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt=\infty. \tag{27}$$

例如若 $A=A_p$ 由(10)给定, (27)恰好当 $p\leq n$ 时成立. 当(27)满足,我们由

$$A_*^{-1}(t)=\int_0^t \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{(n+1)/n}}d\tau,\ t\geq 0 \tag{28}$$

定义 A 的 Sobolev 共轭 A_*. 易于验证 A_* 是一个 N-函数. 若 $1<p<n$, 令 $q=np/(n-p)$, 我们有

$$A_{p*}(t)=q^{1-q}p^{-q/p}A_q(t).$$

同样易见对情形 $p=n$，$A_{n*}(t)$ 在无穷远附近等价于 N-函数

$$e^t-t-1.$$

在叙述第一个嵌入定理之前，我们准备今后证明中需要的一个技术性引理.

8.31 引理 设 $u\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且 f 在 $\mathbf{R}$ 上满足 Lipschitz 条件. 则 $g\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，其中 $g(x)=f(|u(x)|)$，且

$$D_jg(x)=f'(|u(x)|)\operatorname{sgn}u(x)\cdot D_ju(x).$$

证明 因为 $|u|\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且 $D_j|u(x)|=\operatorname{sgn}u(x)D_ju(x)$，只需对正实值函数 u 建立引理，于是 $g(x)=f(u(x))$. 令 $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$. 又令 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的通常的基，我们得

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega f(u(x))D_j\phi(x)dx\\
&=-\lim_{h\to0}\int_\Omega f(u(x))\frac{\phi(x)-\phi(x-he_j)}{h}dx\\
&=\lim_{h\to0}\int_\Omega\frac{f(u(x+he_j))-f(u(x))}{h}\phi(x)dx\\
&=\lim_{h\to0}\int_\Omega Q(x,h)\frac{u(x+he_j)-u(x)}{h}\phi(x)dx,
\end{aligned}$$

其中，因为 f 是 Lipschitz 连续的，对每一 h 函数 $Q(\cdot,h)$ 在 Ω 上由

$$Q(x,h)=\begin{cases}\dfrac{f(u(x+he_j))-f(u(x))}{u(x+he_j)-u(x)} & \text{当 } u(x+he_j)\neq u(x)\\ f'(u(x)) & \text{其余}\end{cases}$$

a.e. 定义，此外，$\|Q(\cdot,h)\|_{\infty,\Omega}\leqslant K$，$K$ 为一不依赖于 h 的常数. 泛函分析中一个熟知的定理保证对 h 的某一趋于 0 的序列，$Q(\cdot,h)$ 依 L^∞ 的弱-星拓扑收敛到 $f'(u(x))$，另外因为 $u\in W^{1,1}(\operatorname{supp}\phi)$. 我们有在 $L^1(\operatorname{supp}\phi)$ 中

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+he_j)-u(x)}{h}\phi(x)=D_ju(x)\phi(x),$$

由此

$$-\int_\Omega f(u(x))D_j\phi(x)dx=\int_\Omega f'(u(x))D_ju(x)\phi(x)dx.$$

这显然蕴涵引理.

8.32 定理 设Ω在$\mathbf{R}^n$中有界且有锥性质，若(26)和(27)成立，则

$$W^1L_A(\Omega)\to L_{A_*}(\Omega).$$

并且，若B是任何在无穷远附近本质上增加比A_*更慢的N-函数,则嵌入

$$W^1L_A(\Omega)\to L_B(\Omega)$$

是紧的.

证明 由(28)定义的函数 $s=A_*(t)$满足微分方程

$$A^{-1}(s)\frac{ds}{dt}=s^{(n+1)/n},\tag{29}$$

于是由(7)式右边一个不等式,

$$\frac{ds}{dt}\leqslant s^{1/n}\widetilde{A}^{-1}(s).$$

因此 $\sigma(t)=[A_*(t)]^{(n-1)/n}$ 满足微分不等式

$$\frac{d\sigma}{dt}\leqslant\frac{n-1}{n}\widetilde{A}^{-1}((\sigma(t))^{n/(n-1)}).\tag{30}$$

设 $u\in W^1L_A(\Omega)$ 并暂且假定u在Ω上有界且在$L_A(\Omega)$中异于零. 则$\int_\Omega A_*(|u(x)|/\lambda)dx$ 当λ从零增至无穷时连续地从无穷减小至零,从而对某一正数λ取值为1. 这样

$$\int_\Omega A_*\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx=1,\quad K=\|u\|_{A_*}.\tag{31}$$

令 $f(x)=\sigma(|u(x)|/K)$. 显然 $u\in W^{1,1}(\Omega)$而σ在$|u|/K$的值域

上满足 Lipschitz 条件，于是由引理 8.31，f 属于 $W^{1,1}(\Omega)$。由定理 5.4 我们有 $W^{1,1}(\Omega)\to L^{n/(n-1)}(\Omega)$ 且

$$\|f\|_{0,n/(n-1)}\leqslant K_1\left\{\sum_{j=1}^{n}\|D_jf\|_{0,1}+\|f\|_{0,1}\right\}$$

$$=K_1\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{K}\int_\Omega\sigma'\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)|D_ju(x)|dx+\int_\Omega\sigma\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx\right\}. \tag{32}$$

由(31)和 Hölder 不等式(16)，我们得

$$1=\left\{\int_\Omega A_*\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx\right\}^{(n-1)/n}=\|f\|_{0,n/(n-1)}$$

$$\leqslant\frac{2K_1}{K}\sum_{j=1}^{n}\left\|\sigma'\left(\frac{|u|}{K}\right)\right\|_{\widetilde{A}}\|D_ju\|_A+K_1\int_\Omega\sigma\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx. \tag{33}$$

利用(30)，我们有

$$\left\|\sigma'\left(\frac{|u|}{K}\right)\right\|_{\widetilde{A}}\leqslant\frac{n-1}{n}\left\|\widetilde{A}^{-1}\left(\left(\sigma\left(\frac{|u|}{K}\right)\right)^{n/(n-1)}\right)\right\|_{\widetilde{A}}$$

$$=\frac{n-1}{n}\inf\left\{\lambda>0:\ \int_\Omega\widetilde{A}\left(\frac{\widetilde{A}^{-1}(A_*(|u(x)|/K))}{\lambda}\right)dx\leqslant1\right\}.$$

设 $\lambda>1$ 则

$$\int_\Omega\widetilde{A}\left(\frac{\widetilde{A}^{-1}(A_*(|u(x)|/K))}{\lambda}\right)dx\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_\Omega A_*\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\lambda}<1.$$

于是

$$\left\|\sigma'\left(\frac{|u|}{K}\right)\right\|_{\widetilde{A}}\leqslant\frac{n-1}{n}. \tag{34}$$

令 $g(t)=A_*(t)/t$, $h(t)=\sigma(t)/t$. 容易验证 h 在有限区间有界且 $\lim\limits_{t\to\infty}g(t)/h(t)=\infty$. 于是存在常数 t_0 使当 $t\geqslant t_0$ 有 $h(t)\leqslant g(t)/2K_1$. 令 $K_2=K_1\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0}h(t)$，对所有 $t\geqslant0$ 我们有

$$\sigma(t)\leqslant(1/2K_1)A_*(t)+(K_2/K_1)t.$$

因此

$$K_1\int_\Omega \sigma\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega A_*\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx+\frac{K_2}{K_1}\int_\Omega |u(x)|\,dx$$

$$\leqslant\frac{1}{2}+\frac{K_3}{K}\|u\|_A, \tag{35}$$

其中因为Ω体积有限 $K_3=2K_2\|1\|_{\tilde{A}}<\infty$.

联合(33)—(35), 我们得

$$1\leqslant(2K_1/K)(n-1)\|u\|_{1,A}+\frac{1}{2}+(K_3/K)\|u\|_A,$$

从而

$$\|u\|_{A_*}=K\leqslant K_4\|u\|_{1,A}. \tag{36}$$

我们注意 K_4 可以依赖 n, A, vol Ω 和确定Ω的锥性质的锥.

为推广(36)到任意 $u\in W^1L_A(\Omega)$令

$$u_k(x)=\begin{cases}u(x) & \text{当}\ |u(x)|\leqslant k\\ k\operatorname{sgn}u(x) & \text{当}\ |u(x)|>k,\end{cases} \tag{37}$$

显然 u_k 有界并由引理 8.31 亦属于 $W^1L_A(\Omega)$, 并且 $\|u_k\|_{A_*}$随 k 增加但被 $K_4\|u\|_{1,A}$ 界住, 于是 $\lim\limits_{k\to\infty}\|u_k\|_{A_*}=K$ 存在且

$$K\leqslant K_4\|u\|_{1,A}.$$

由 Fatau 引理

$$\int_\Omega A_*\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx\leqslant\lim_{k\to\infty}\int_\Omega A_*\left(\frac{|u_k(x)|}{K}\right)dx\leqslant 1,$$

因此 $u\in L_{A_*}(\Omega)$且(36)成立.

因Ω体积有限我们有

$$W^1L_A(\Omega)\to W^{1,1}(\Omega)\to L^1(\Omega),$$

由定理 6.2, 后一嵌入是紧的. $W^1L_A(\Omega)$的一个有界子集S在 $L_{A*}(\Omega)$中有界并且在 $L^1(\Omega)$中准紧, 由定理 8.23, 它在 $L_B(\Omega)$ 准紧, 只要B在无穷远附近本质上增加比A更慢. ▌

定理 8.32 可推广到任意(甚至无界)区域 Ω, 只要W代以W_0.

8.33 定理 设Ω是$\mathbf{R}^n$中任一区域，若N-函数A满足(26)和(27)，则

$$W_0^1L_A(\Omega)\to L_{A_*}(\Omega).$$

并且，若Ω_0是Ω的一个有界子区域，则对任何在无穷远附近本质上增加比A更慢的N-函数B嵌入

$$W_0^1L_A(\Omega)\to L_B(\Omega_0)$$

存在且是紧的.

证明 若$u\in W_0^1L_A(\Omega)$，则前面的证明中的函数f可用$C_0^\infty(\Omega)$中的元素在$W^{1,1}(\Omega)$中来逼近. 由 Sobolev 不等式(5.11 节)(32)中右端的项$\|f\|_{0,1}$取消后成立. 因此(35)不再需要，而证明不要求Ω体积有限，锥性质也不需要，因为 Sobolev 不等式对所有$u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$成立. 紧性的推理与前面类似. ▌

8.34 附注 定理 8.32 在下述意义下不是最优的：对某些A，L_{A_*}未必是$W^1L_A(\Omega)$可以嵌入其中的最小Orlicz 空间. 例如若$A(t)=A_n(t)=t^n/n$，如前面已指出的，$A_*(t)$在无穷远附近等价于e^t-t-1但该N-函数在无穷远附近本质上增加比$\exp(t^{n/(n-1)})-1$更慢，于是定理 8.25 给出一个比定理 8.32 更深刻的结果. Donaldson 和 Trudinger[22] 断言定理 8.32 可用定理 8.25 的方法改进，只要对$p<n$，A在无穷远附近控制A_p，但若对某一$p<n$，A_p在无穷远附近控制A，定理 8.32 给出最佳结果.

8.35 定理 设Ω在$\mathbf{R}^n$中有锥性质，设A是满足

$$\int_1^\infty \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{(n+1)/n}}d\tau<\infty \tag{38}$$

的N-函数，则

$$W^1L_A(\Omega)\to C_B(\Omega)=C(\Omega)\cap L^\infty(\Omega).$$

证明 设C是包含在Ω内的一个有限锥. 我们将指出存在一个依赖于n，A和C的大小的常数K_1使

$$\|u\|_{\infty,C}\leqslant K_1\|u\|_{1,A,C}. \tag{39}$$

这样,我们可设A满足(26)而不失去一般性,因为否则,设B是一个满足(26)且在无穷远附近和A等价的N-函数,则$W^1L_A(C)\to W^1L_B(C)$,由定理8.12,嵌入常数依赖于A, B和$\mathrm{vol}C$.因B满足(38),我们将有

$$\|u\|_{\infty,C}\leqslant K_2\|u\|_{1,B,C}\leqslant K_3\|u\|_{1,A,C}.$$

令Ω可表示成一些这样的全等的有限锥C的并,

(39)显然蕴涵

$$\|u\|_{\infty,\Omega}\leqslant K_1\|u\|_{1,A,\Omega}. \tag{40}$$

因A满足(26)和(38)我们有

$$\int_0^\infty\frac{A^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt=K_4<\infty.$$

令
$$\Lambda^{-1}(t)=\int_0^t\frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{(n+1)/n}}d\tau,$$

则Λ^{-1}一对一映射$[0,\infty)$到$[0,K_4)$上而且有凸反函数Λ.对$t\geqslant K_4$,我们令$\Lambda(t)=\infty$,即把Λ的定义域延拓到$(0,\infty)$.函数Λ是所谓Young函数(参看Luxemburg[42]或O'Neill[55]),尽管不是在8.2节定义的N-函数,易见Luxemburg范数

$$\|u\|_{\Lambda,C}=\inf\{k>0:\int_\Omega\Lambda(|u(x)|/k)dx\leqslant 1\}$$

仍是一个在$L^\infty(C)$上跟通常范数等价的一个范数;事实上,

$$(1/K_4)\|u\|_{\infty,C}\leqslant\|u\|_{\Lambda,C}\leqslant[1/\Lambda^{-1}(1/\mathrm{vol}C)]\|u\|_{\infty,C}. \tag{41}$$

并且,$s=\Lambda(t)$满足微分方程(29),于是定理8.32的证明可以用于这里从而对$u\in W^1L_A(C)$得到

$$\|u\|_{\Lambda,C}\leqslant K_5\|u\|_{1,A,C} \tag{42}$$

不等式(39)现在即由(41)和(42)推出.

由定理8.28(d)一个元素$u\in W^1E_A(\Omega)$可用Ω上的连续函数依范数逼近,由(40)推出u必定在Ω内a.e.同一个连续函数重合

(参看引理 5.15 证明的第一节).

假定可以构造一个 N-函数使在 0 附近 $B(t)=A(t)$, B 在无穷远附近本质上增加比 A 更慢, 并且

$$\int_1^\infty \frac{B^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt \leqslant 2\int_1^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt < \infty.$$

则由定理 8.16, $u\in W^1L_A(C)$蕴涵 $u\in W^1E_B(C)$, 于是 $W^1L_A(\Omega)\subset C(\Omega)$, 这正是所要证明的.

因此只剩下构造一个这样的 N-函数 B. 令 $1<t_1<t_2<\cdots$满足

$$\int_{t_k}^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt = \frac{1}{2^{2k}}\int_1^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt.$$

我们归纳地定义序列$\{s_k\}$$(s_k\geqslant t_k)$和函数 $B^{-1}(t)$如下:

令 $s_1=t_1$ 且当 $0\leqslant t\leqslant s_1$, $B^{-1}(t)=A^{-1}(t)$. 设已选择 s_1, s_2, $\cdots s_{k-1}$ 并当 $0\leqslant t\leqslant s_{k-1}$ 已定义 $B^{-1}(t)$, 我们沿着斜率为$(A^{-1})'(s_{k-1}-)$(因为 A^{-1} 凹, 它总存在)的直线向 s_{k-1} 右侧延续 $B^{-1}(t)$直到点t'_k, 这里 $B^{-1}(t'_k)=2^{k-1}A^{-1}(t'_k)$. 因为 $\lim\limits_{t\to\infty}A^{-1}(t)/t=0$, 这样的 t'_k 必定存在. 若 $t'_k\geqslant t_k$令$s_k=t'_k$. 不然令 $s_k=t_k$ 而令 $B^{-1}(t)=2^{k-1}A^{-1}(t)$以从 t'_k 到 s_k 延拓B^{-1}. 显然B^{-1}是凹的而B是一个 N-函数. 而且在 0 附近 $B(t)=A(t)$, 又因

$$\lim_{t\to\infty}\frac{B^{-1}(t)}{A^{-1}(t)}=\infty,$$

B 在无穷远附近本质上增加比 A 更慢. 最后

$$\int_1^\infty \frac{B^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt \leqslant \int_1^{s_1} \frac{A^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt + \sum_{k=2}^\infty \int_{s_{k-1}}^{s_k} \frac{2^{k-1}A^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt$$

$$\leqslant \int_1^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt + \sum_{k=2}^\infty 2^{k-1}\int_{t_{k-1}}^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt$$

$$=2\int_1^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt.$$

这正是所要证明的. ▌

8.36 定理 设Ω是$\mathbf{R}^n$内具有强局部 Lipschitz 性质的一个区域, 若 N-函数A满足

$$\int_1^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt<\infty, \tag{43}$$

则存在一个常数K使对任何$u\in W^1L_A(\Omega)$(由前一定理可设它是连续的)和所有$x,y\in\Omega$我们有

$$|u(x)-u(y)|\leqslant K\|u\|_{1,A,\Omega}\int_{|x-y|^{-n}}^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt. \tag{44}$$

证明 我们对单位棱长的立方体Ω建立(44); 用引理 5.17 证明中的方法可以推广到更一般的强 Lipschitz 区域, 象在该引理中那样, 用Ω_σ表示Ω的一个平行子立方体, 对$x\in\overline{\Omega}_\sigma$得到

$$\left|u(x)-\frac{1}{\sigma^n}\int_{\Omega_\sigma}u(z)dz\right|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{\sigma^{n-1}}\int_0^1 t^{-n}dt\int_{\Omega_{t\sigma}}|\mathrm{grad}u(z)|dz.$$

由(22), $\|1\|_{\widetilde{A},\Omega_{t\sigma}}=1/\widetilde{A}^{-1}(t^{-n}\sigma^{-n})$, 由 Hölder 不等式和(7)推得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{t\sigma}}|\mathrm{grad}u(z)|dz&\leqslant2\|\mathrm{grad}u\|_{A,\Omega_{t\sigma}}\|1\|_{\widetilde{A},\Omega_{t\sigma}}\\&\leqslant2\|u\|_{1,A,\Omega}/\widetilde{A}^{-1}(t^{-n}\sigma^{-n})\\&\leqslant2\sigma^n t^n\|u\|_{1,A,\Omega}A^{-1}(t^{-n}\sigma^{-n}).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\left|u(x)-\frac{1}{\sigma^n}\int_{\Omega_\sigma}u(z)dz\right|&\leqslant2\sqrt{n}\,\sigma\|u\|_{1,A,\Omega}\int_0^1A^{-1}\left(\frac{1}{t^n\sigma^n}\right)dt\\&=\frac{2}{\sqrt{n}}\|u\|_{1,A,\Omega}\int_{\sigma^{-n}}^\infty\frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{(n+1)/n}}d\tau.\end{aligned} \tag{45}$$

若$x,y\in\Omega$且$\sigma=|x-y|<1$, 存在一个子立方体Ω_σ, $x,y\in\overline{\Omega}_\sigma\subset\Omega$. 对$x$和$y$应用(45), 我们得

$$|u(x)-u(y)|\leqslant\frac{4}{\sqrt{n}}\|u\|_{1,A,\Omega}\int_{|x-y|^{-n}}^\infty\frac{A^{-1}(t)}{t^{(n+1)/n}}dt.$$

对 $|x-y|\geqslant 1$, (44)由(40)和(43)导出. ∎

8.37 用 M 表示 $t>0$ 的这样正的连续增加的函数的类：当 t 减小至 0 时它趋于 0. 若 $\mu\in M$, 空间 $C_\mu(\overline{\Omega})$ 由这样的函数 $u\in C(\overline{\Omega})$ 组成：u 的范数

$$\|u;C_\mu(\overline{\Omega})\|=\|u;C(\overline{\Omega})\|+\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{\mu(|x-y|)}$$

有限. $C_\mu(\overline{\Omega})$赋以上述范数是一个 Banach 空间. 上面的定理断言, 若(43)成立, 则

$$W^1L_A(\Omega)\to C_\mu(\overline{\Omega}),$$

$$\mu(t)=\int_{t^{-n}}^{\infty}\frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{(n+1)/n}}d\tau. \tag{46}$$

若 $\mu,\nu\in M$ 且 $\mu/\nu\in M$, 则对有界集 Ω, 象在定理 1.31 中一样, 我们有嵌入

$$C_\mu(\overline{\Omega})\to C_\nu(\overline{\Omega})$$

是紧的. 因此若 μ 由(46)给定, 嵌入

$$W^1L_A(\Omega)\to C_\nu(\overline{\Omega})$$

亦如是.

下面是一个迹嵌入定理，它推广了引理 5.19(的 $m=1$ 的情形).

8.38 定理 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 内一个有锥性质的有界区域, 令 Ω^k 表示 Ω 同 $\mathbf{R}^n$ 内一个 k 维平面的交, 设 A 是满足(26)和(27)的一个 N-函数, 而 A_* 由(28)给定. 令 $1\leqslant p<n$, 由 $B(t)=A(t^{1/p})$ 给定的函数 B 是一个 N-函数. 若或者 $n-p<k\leqslant n$ 或者 $p=1$ 而 $n-1\leqslant k\leqslant n$, 则

$$W^1L_A(\Omega)\to L_{A_*^{k/n}}(\Omega^k),$$

其中 $A_*^{k/n}(t)=[A_*(t)]^{k/n}$.

并且, 若 $p>1$ 而 C 是一个在无穷远附近增加本质上比 $A_*^{k/n}$

更慢的 N-函数，则嵌入

$$W^1L_A(\Omega)\to L_C(\Omega^k) \tag{47}$$

是紧的.

证明 验证$A_*^{k/n}$是一个N-函数的问题留给读者. 设$u\in W^1L_A(\Omega)$是一个有界函数，则

$$\int_{\Omega^k} A_*^{k/n}\left(\frac{|u(y)|}{K}\right)dy=1$$

$$K=\|u\|_{A_*^{k/n},\Omega^k}. \tag{48}$$

我们希望证明

$$K\leqslant K_1\|u\|_{1,A,\Omega}, \tag{49}$$

K_1 不依赖于 u. 因为(49)对特殊情形 $k=n$ 是已知的(定理 8.32)，不失一般性我们可以假设

$$K\geqslant\|u\|_{A_*,\Omega}=\|u\|_{A_*^{n/n},\Omega^n}. \tag{50}$$

令 $\omega(t)=[A_*(t)]^{1/q}$, $q=np(n-p)$. 由引理 5.19(情形 $m=1$)我们有

$$\begin{aligned}&\left\|\omega\left(\frac{|u|}{K}\right)\right\|^p_{kp/(n-p),\Omega^k}\\&\leqslant K_2\left\{\sum_{j=1}^n\left\|D_j\omega\left(\frac{|u|}{K}\right)\right\|^p_{p,\Omega}+\left\|\omega\left(\frac{|u|}{K}\right)\right\|^p_{p,\Omega}\right\}\\&=K_2\left\{\frac{1}{K^p}\sum_{j=1}^n\int_\Omega\left|\omega'\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)\right|^p|D_ju(x)|^pdx+\right.\\&\qquad\qquad\left.\int_\Omega\left|\omega\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)\right|^pdx\right\}.\end{aligned}$$

利用(48)并注意$\||v|^p\|_{B,\Omega}\leqslant\|v\|^p_{A,\Omega}$ 我们得

$$\begin{aligned}1&=\left(\int_{\Omega^k}\left(A_*\left(\frac{|u(y)|}{K}\right)\right)^{k/n}dy\right)^{(n-p)/k}=\left\|\omega\left(\frac{|u|}{K}\right)\right\|^p_{kp/(n-p),\Omega^k}\\&\leqslant\frac{2K_2}{K^p}\sum_{j=1}^n\left\|\left(\omega'\left(\frac{|u|}{K}\right)\right)^p\right\|_{\widetilde{B},\Omega}\||D_ju|^p\|_{B,\Omega}+K_2\left\|\omega\left(\frac{|u|}{K}\right)\right\|^p_{p,\Omega}\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{2nK_2}{K^p}\left\|\left(\omega'\left(\frac{|u|}{K}\right)\right)^p\right\|_{\widetilde{B},\Omega}\|u\|_{1,A,\Omega}^p + K_2\left\|\omega\left(\frac{|u|}{K}\right)\right\|_{p,\Omega}^p. \tag{51}$$

令 $B^{-1}(t)=[A^{-1}(t)]^p$ 并且利用(29)和(7), 我们有

$$\begin{aligned}[\omega'(t)]^p &= (1/q^p)[A_*(t)]^{p(1-q)/q}[A'_*(t)]^p \\ &= (1/q^p)A_*(t)[1/B^{-1}(A_*(t))] \\ &\leqslant (1/q^p)\widetilde{B}^{-1}(A_*(t)).\end{aligned}$$

由(50)推出

$$\int_\Omega \widetilde{B}\left(\left(\frac{\omega'(|u(x)|/K)}{1/q}\right)^p\right)dx \leqslant \int_\Omega A_*\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx \leqslant 1.$$

于是

$$\|(\omega'(|u|/K))^p\|_{\widetilde{B},\Omega} \leqslant 1/q^p. \tag{52}$$

今令 $g(t)=A_*(t)/t^p$, $h(t)=(\omega(t)/t)^p$, 易于验证 $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)/h(t)=\infty$. 为看出 $h(t)$在 0 附近是有界的, 令$s=A_*(t)$, 而考虑

$$(h(t))^{1/p}=\frac{(A_*(t))^{1/q}}{t}=\frac{s^{(1/p)-(1/n)}}{\int_0^s \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{(n+1)/n}}d\tau} \leqslant \frac{s^{1/p}}{\int_0^s \frac{[B^{-1}(\tau)]^{1/p}}{\tau}d\tau}.$$

因为B是一个 N-函数, $\lim\limits_{\tau\to 0+} B^{-1}(\tau)/\tau=\infty$. 因此对充分小的 t 值我们有

$$(h(t))^{1/p} \leqslant \frac{s^{1/p}}{\int_0^s \tau^{-1+1/p}d\tau}=\frac{1}{p}.$$

因此存在一个常数 K_3 使当 $t\geqslant 0$

$$(\omega(t))^p \leqslant (1/2K_2)A_*(t)+K_3t^p.$$

利用(50), 我们现在得到

$$\begin{aligned}\left\|\omega\left(\frac{|u|}{K}\right)\right\|_{p,\Omega}^p &\leqslant \frac{1}{2K_2}\int_\Omega A_*\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx+\frac{K_3}{K^p}\int_\Omega |u(x)|^p dx \\ &\leqslant \frac{1}{2K_2}+\frac{2K_3}{K^p}\||u|^p\|_{B,\Omega}\|1\|_{\widetilde{B},\Omega}\end{aligned}$$

$$\leqslant\frac{1}{2K_2}+\frac{K_4}{K^p}\|u\|_{A,\Omega}^p. \tag{53}$$

从(51)—(53)推出不等式

$$1\leqslant\frac{2nK_2}{K^p}\frac{1}{q^p}\|u\|_{1,A,\Omega}^p+\frac{1}{2}+\frac{K_4K_2}{K^p}\|u\|_{A,\Omega}^p,$$

因此(49)成立. 推广(49)到任意 $u\in W^1L_A(\Omega)$ 可象定理 8.32 的证明那样.

因 $B(t)=A(t^{1/p})$ 是一个 N-函数并且 Ω 是有界的, 我们有 $W^1L_A(\Omega)\to W^{1,p}(\Omega)\to L^1(\Omega^k)$, 由定理 6.2, 后一嵌入是紧的(只要 $p>1$). (47)的紧性现可由定理 8.23 推出. ▌

8.39 我们以 Donaldson 和 Trudinger [22] 的一般 Orlicz-Sobolev 空间嵌入定理结束本章. 对一个给定的 N-函数 A 我们定义 N-函数序列 $B_0, B_1, B_2, \cdots$ 如下:

$$B_0(t)=A_0(t)$$

$$(B_k)^{-1}(t)=\int_0^t\frac{(B_{k-1})^{-1}(\tau)}{\tau^{(n+1)/n}}d\tau, k=1,2,\cdots$$

在每一步我们假定

$$\int_0^1\frac{(B_k)^{-1}(\tau)}{\tau^{(n+1)/n}}d\tau<\infty, \tag{54}$$

若有必要, B_k 代之以在无穷远附近与 B_k 等价的满足(54)的 N-函数. 令 $J=J(A)$ 是满足

$$\int_1^\infty\frac{(B_J)^{-1}(\tau)}{\tau^{(n+1)/n}}d\tau<\infty$$

的最小非负整数, 显然 $J(A)\leqslant n$.

若 μ 属于 8.37 节中定义的类 M, 我们定义空间 $C_\mu^m(\overline{\Omega})$ 由所有这样的函数 $u\in C^m(\overline{\Omega})$ 组成: 对于它, $D^\alpha u\in C_\mu(\overline{\Omega})$, $|\alpha|\leqslant m$. 空间 $C_\mu^m(\overline{\Omega})$ 赋以范数

$$\|u; C_\mu^m(\overline{\Omega})\|=\max_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u; C_\mu(\overline{\Omega})\|$$

是一个 Banach 空间.

8.40 定理 设Ω是 $\mathbf{R}^n$ 内一个具有锥性质的有界区域. 设A是一个 N-函数.

(*a*) 若 $m\leqslant J(A)$,则 $W^mL_A(\Omega)\to L_{B_m}(\Omega)$且嵌入 $W^mL_A(\Omega)\to L_C(\Omega)$对任何在无穷远附近本质上增加比 B_m 更慢的 N-函数 C 是紧的.

(*b*) 若 $m>J(A)$,则 $W^mL_A(\Omega)\to C_B(\Omega)=C(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.

(*c*) 若Ω还有强局部 Lipschitz 性质,且若 $m>J=J(A)$,则 $W^mL_A(\Omega)\to C_\mu^{m-J-1}(\overline{\Omega})$,其中

$$\mu(t)=\int_{t^{-n}}^{\infty}\frac{(B_J)^{-1}}{\tau^{(n+1)/n}}d\tau.$$

并且,只要 $\nu\in M$又 $\mu/\nu\in M$,嵌入 $W^mL_A(\Omega)\to C^{m-J-1}(\overline{\Omega})$和 $W^mL_A(\Omega)\to C_\nu^{m-J-1}(\overline{\Omega})$是紧的.

8.41 附注 上述定理可直接从定理 8.32,8.35 和 8.36 推出.并且,若在(*a*)中用 E_A 代替 L_A,我们得 $W^mE_A(\Omega)\to E_{B_m}(\Omega)$, 因为若 $u\in W^1E_A(\Omega)$,在定理 8.32 证明中由(37)定义的序列$\{u_k\}$收敛到 u. 若 $W^mL_A(\Omega)$ 处处代之以 $W_0^mL_A(\Omega)$. 定理 8.40 对Ω不加限制亦成立.

参考文献

1. R. A. Adams, Some integral inequalities with applications to the imbedding of Sobolev spaces defined over irregular domains, *Trans. Amer. Math. Soc.* **178** (1973), 401—429.
2. R. A. Adams, Capacity and compact imbeddings, J. *Math. Mech.*, **19** (1970), 923—929.
3. R. A. Adams and J. Fournier, Compact imbedding theorems for functions without compact support, *Canad. Math. Bull.*, **14** (1971), 305—309.
4. R. A. Adams and J. Fournier, Some imbedding theorems for Sobolev spaces, *Canad.* J. Math. **23** (1971), 517—530.
5. R. D. Adams, N. Aronszajn, and K. T. Smith, Theory of Bessel potentials, part II, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **17** (No. 2) (1967), 1—135.
6. S. Agmon, "Lectures on Ellliptic Boundary Value Problems," Van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey, 1965.
7. N. Aronszajn and K. T. Smith, Theory of Bessel potentials, Part I. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **11** (1961), 385—475.
8. N. Aronszajn, F. Mulla and P. Szeptycki, On spaces of potentials connected with L^p-classes, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **13** (No. 2) (1963), 211—306.
9. O. V. Besov, On a certain family of functional spaces. Imbedding and continuation theorems, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **126** (1959), 1163—1165.
10. O. V. Besov, On some conditions of membership in L^p for derivatives of periodic functions, Naucn. *Dokl. Vyss. Skoly. Fiz.-Mat. Nauki* (1959), 13—17.
11. F. E. Browder, On the eigenfunctions and eigenvalues of general linear elliptic operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **39** (1953), 433—439.

12. F. E. Browder, On the spectral theory of elliptic differential operators I, *Math. Ann.* **142** (1961), 22—130.

13. P. L. Butzer and H. Berens, "Semigroups of Operators and Approximation," Springer-Verlag, Berlin, 1967.

14. A. P. Calderòn, Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions, *Proc. Sym. Pure Math.*, **4** (1961), 33—46. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

15. A. P. Calderòn, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, *Studia Math.* **24** (1964), 113—190.

16. A. P. Calderòn and A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.* **88** (1952), 85—139.

17. C. W. Clark. The Hilbert-Schmidt property for embedding maps between Sobolev spaces, *Canad. J. Math.* **18** (1966), 1079—1084.

18. C. W. Clark, "Introduction to Sobolev spaces," (Seminar notes) Univ. of British Columbia, Vancouver, 1968.

19. J. A. Clarkson, Uniformly convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **40** (1936), 396—414.

20. G. Dankert, "Sobolev imbedding theorems in Orlicz spaces," (Thesis). Univ. of Cologne, 1966.

21. J. Deny and J. L. Lions, Les espaces du type de Beppo Levi, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **5** (1955), 305—370.

22. T. K. Donaldson and N. S. Trudinger, Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems, *J. Functional Analysis*, **8** (1971), 52—75.

23. G. Ehrling, On a type of eigenvalue problem for certain elliptic differential operators. *Math. Scand.* **2** (1954), 267—285.

24. E. Gagliardo, Properietà di alcune classi di funzioni in piu variabili, *Ricerche Mat.* **7** (1958) 102—137.

25. E. Gagliardo, Ulteriori properietà di alcune classi di funzioni in piu variabili, *Ricerche Mat.* **8** (1959), 24—51.

26. I. G. Globenko, Embedding theorems for a region with null salient points, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **132** (1960), 251—253 English trans.: *Soviet Math. Dokl.* **1** (1960), 517—519.

27. I. G. Globenko, Some questions in the theory of imbedding for domains with singularities on the boundary, *Mat. Sb.*, **57**(99) (1962), 201—224.
28. P. Grisvard, Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, *J. Math. Pures Appl.* **45**(1966)143—290.
29. G. H. Hardy, J. E. Littlewood. and G. Polya, "Inequalities," Cambridge Univ. Press, London and New York, 1943.
30. J. A. Hempel, G. R. Morris, and N. S. Trudinger, On the sharpness of a limiting case of the Sobolev imbedding theorem, *Bull. Austral. Math. Soc.* **3**(1970), 369—373.
31. M. Hestenes, Extension of the range of a differentiable function, *Duke J. Math.* **8**(1941)183—192.
32. E. Hewitt and K. Stromberg, "Real and Abstract Analysis," Springer-Verlag, New York, 1969.
33. V. I. Kondrachov, Certain properties of functions in the spaces L^p, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **48**(1945), 535—538.
34. M. A. Kranosel'skii and Ya. B. Rutickii, "Convex Functions and Orlicz Spaces," Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1961.
35. L. Lichenstein, Eine elementare Bemerkung zur reelen Analysis, *Math. Z.* **30**(1929), 794—795.
36. J. L. Lions, Une construction d'espaces d'interpolation, *C. R. Acad. Sci. Paris* **83**(1960), 1853—1855.
37. J. L. Lions, Sur les espaces d'interpolation; dualité, Math. Scand. **9**(1961), 147—177.
38. J. L. Lions, Thèorèmes de trace et d'interpolation(IV), Math. Ann. **151**(1963), 42—56.
39. J. L. Lions, "Problèmes aux Limites dans les Équations aux Derivées Partielles," (Seminar notes), Univ. of Montreal Press, 1965.
40. J. L. Lions and E. Magenes. Problemi ai limiti non omogenei (III). *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **15**(1961), 41—103.

41. P. I. Lizorkin, Boundary properties of functions from "weight" classes, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **132**(1960), 514—517 English trans.: *Soviet Math. Dokl* 1(1960), 589—593.

42. W. Luxemburg, "Banach function spaces," (Thesis), Technische Hogeschool te Delft. The Netherlands, 1955.

43. K. Maurin, Abbildungen vom Hilbert-Schmidtschen Typus und ihre Anwendungen, *Math. Scand.* **9**(1961), 359—371.

44. V. G. Maz'ja, Classes of domains and imbedding theorems for function spaces, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **133**(1960), 527—530 English transl.: *Soviet Math. Dokl.* 1(1960). 882—885.

45. V. G. Maz'ja, p-conductance and theorems of imbedding certain function spaces into the space C. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **140** (1961), 299—302 [English transl.: *Soviet Math. Dokl.* **2**(1961). 1200—1203].

46. N. Meyers and J. Serrin, $H=W$. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **51** (1964), 1055—1056.

47. C. B. Morrey, Functions of several variables and absolute continuity, II, *Duke J.* Math. 6(1940), 187—215.

48. M. E. Munroe, "Measure and Integration," 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1971.

49. S. M. Nikol'skii, Inequalities for entire functions of exponential type and their application to the theory of differentiable functions of several variables. *Trudy Mat. Inst. Steklov* **38**(1951), 244—278 [English transl.: *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **80** (1969), 1—38].

50. S. M. Nikol'skii, Properties of certain classes of functions of several variables on differentiable manifolds, *Mat. Sb.* **33**(75) (1953), 261—326[English transl.: *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **80**(1969), 39—118].

51. S. M. Nikol'skii, Extension of functions of several variables preserving differential properties, *Mat. Sb.* **40**(82)(1956), 243—268 [English transl.: *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **83**(1969),

159—188].

52. S. M. Nikol'skii, On imbedding, continuation and approximation theorems for differentiable functions of several variables, *Russian Math. Surveys* **16** (1961) 55—104.

53. L. Nirenberg, Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **8** (1955), 649—675.

54. L. Nirenberg, An extended interpolation inequality, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **20** (1966) 733—737.

55. R. O'Neill, Fractional intergration in Orlicz spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **115** (1965). 300—328.

56. J. Peetre, Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **16** (1966), 279—317.

57. F. Rellich, Ein Satz über mittlere Konvergenz, *Göttingen Nachr.* (1930), 30—35.

58. W. Rudin, "Real and Complex Analysis," McGraw-Hill, New York 1966.

59. W. Rudin, "Functional Analysis," McGraw-Hill New York. 1973.

60. L. Schwartz, "Théorie des Distributions," Hermann, Paris, 1966.

61. R. T. Seeley, Extension of C^∞-functions defined in a half-space, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 625—626.

62. S. L. Sobolev, On a theorem of functional analysis, *Mat. Sb.* **46** (1938), 471—496.

63. S. L. Sobolev, "Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics," Leningrad 1950 [English transl.: *Amer. Math. Soc., Transl., Math Mono.* **7** (1963).]

64. S. L. Sobolev and S. M. Nikol'skii, Imbedding theorems, *Izdat. Akad. Nauk SSSR, Leningrad* (1963), 227—242 [English transl.: *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **87** (1970), 147—173.]

64a. E. M. Stein, "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions," (Princeton Math. Series, Vol. 30), Chapt. V. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970.

65. E. M. Stein and G. Weiss, "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces" (Princeton Math. Series, Vol. 32), Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1972.

66. N. S. Trundinger, On imbeddings into Orlicz spaces and some applications, *J. Math. Mech.* **17** (1967), 473—483.

67. S. V. Uspenskii, An imbedding theorem for S. L. Sobolev's classes W_p^r of fractional order, *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* **130** (1960) 992—993 [English transl.: *Soviet Math. Dokl.* **1** (1960) 132—133].

68. S. V. Uspenskii, Properties of the classes W_p^r with fractional derivatives on differentiable manifolds, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **132** (1960), 60—62 [English trans.: *Soviet Math. Dokl.* **1** (1960), 495—497].

69. K. Yosida, "Functional Analysis," Springer-Verlag, Berlin, 1965.

70. S. Zaidman, "Équations Différentielles Abstraites," (Seminar notes), Univ. of Montréal Press, 1966.

索 引